

Algèbre II
Contrôle du 8 février 2015
durée : 30 minutes

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve.
Les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1

- (1) Montrer que $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$ est algébrique sur \mathbb{Q} et déterminer son polynôme minimal.
- (2) (a) Montrer que $X^2 + 2X - 1$ divise $X^4 - 6X^2 + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
(b) Montrer que $\beta = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ est algébrique sur \mathbb{Q} et déterminer son polynôme minimal.
(c) En déduire une écriture de β ne faisant intervenir qu'une seule racine carrée.

Exercice 2

- (1) Montrer que le polynôme $f = X^4 - 2$ est irréductible sur \mathbb{Q} .
- (2) En déduire que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ et $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$ sont isomorphes.
- (3) Soit K le corps de décomposition de f sur \mathbb{Q} . Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$ en justifiant le résultat.