L3 MATH
2015-2016

Algèbre II
Contrôle du 4 avril 2016
durée : 45 minutes

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve.
Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

(1) Donner la définition d'un endomorphisme cyclique de E.

Dans toute la suite on suppose que E est de dimension $n = 3$.

(2) Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme de E. Soit $a \in K$, démontrer que f est cyclique si et seulement si $f + a \cdot \mathrm{Id}$ est cyclique.

(3) Soit h l'endomorphisme associé à

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans une certaine base. Montrer que son polynôme caractéristique est $\chi_h = -(x+1)^3$. Calculer son polynôme minimal (unitaire) μ_h.

(4) Soit f un endomorphisme de E tel que $\chi_f = \chi_h$ et $\mu_f = \mu_h$. Est-ce que f est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

(5) Montrer que $g = f + \mathrm{Id}$ est nilpotent, calculer son ordre de nilpotence.

(6) (a) Montrer que $E \setminus \mathrm{Ker}(g^2)$ est non vide.

(b) Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(g^2)$, montrer que $\mathscr{B} = (x, g(x), g^2(x))$ est une base de E.

(c) En déduire que f est cyclique.

(7) Donner les matrices de g et de f dans cette base $\mathscr{B}$.

(1) Un endomorphisme f de E est cyclique si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

(2) Supposons que f est cyclique et fixons x tel que $\mathscr{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. Montrons que $\big(x, (f + a\mathrm{Id})(x), (f + a\mathrm{Id})^2(x)\big)$ est aussi une base de E. On a

$$(f + a\mathrm{Id})(x) = f(x) + ax$$

et

$$(f + a\mathrm{Id})^2(x)) = f^2(x) + 2af(x) + a^2x.$$

Le déterminant de cette nouvelle famille dans la base $\mathscr{B}$ vaut $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc la famille $\big(x, (f + a\mathrm{Id})(x), (f + a\mathrm{Id})^2(x)\big)$ est une base de E. Par conséquent, $f + aId$ est cyclique.

La réciproque découle de ce qui précède appliqué à $f + aid$ et $-a$ au lieu de f et $+a$.

(3)

$$\chi_h = \begin{vmatrix} -3-x & -1 & 2 \\ -3 & -1-x & 3 \\ -2 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (-1-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1-x & 3 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$
$$= (-1-x)^3.$$

Le polynôme minimal μ_h de h divise $(1+x)^3$. Montrons que $(1+x)^2$ n'est pas annulateur de h. En effet,

$$(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

L'unique polynôme unitaire divisant χ_h et annulateur de h est donc $(x+1)^3$. Par conséquent, c'est son polynôme minimal, $\mu_h = (1+x)^3$.

(4) Si f était diagonalisable, il serait semblable à $-\mathrm{Id}$ (car -1 est la seule valeur propre de f), donc égal à $-\mathrm{Id}$. Or le polynôme minimal de $-\mathrm{Id}$ est égal à $x+1$ et non à $(x+1)^3$. Donc f n'est pas diagonalisable.

(5) Le polynôme x^3 annule $g = (f+id)$ car $x^3(f+id) = (f+id)^3 = (x+1)^3(f) = 0$ donc g est nilpotent d'ordre au plus 3. De plus, x^2 n'annule pas g, sinon $(x+1)^2$ serait annotateur de f. Donc g est nilpotent d'ordre 3.

(6) (a) D'après la question précédente, g^2 est non nul, donc $E \setminus \ker(g^2)$ est non vide.

(b) Soit $E \setminus \ker(g^2)$. Montrons que la famille $(x, g(x), g^2(x))$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ tels que

$$\lambda_1 x + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 g^2(x) = 0 \quad (*).$$

Appliquons g^2 à cette égalité, on obtient :

$$\lambda_1 g^2(x) + 0 + 0 = 0.$$

Comme $g^2(x) \neq 0$, on en déduit $\lambda_1 = 0$. Appliquons g à $(*)$, on obtient $\lambda_2 g^2(x) + 0 = 0$ d'où $\lambda_2 = 0$. D'après $(*)$, on a donc aussi $\lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille $(x, g(x), g^2(x))$ est libre et comme elle est de cardinal 3, c'est donc une base de E.

(c) La question précédente démontre que g est cyclique. D'après la question (2), $f = g - id$ est donc également cyclique.

(7) La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $f = g - \mathrm{id}$ dans cette même base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$