Feuille de TD n° 1
Révisions d'algèbre : anneaux, corps, polynômes

Factorisation, lemme de Gauss, critère d'Eisenstein

Exercice 1

Factoriser sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$ les polynômes suivants :

$$X^4 + 4, \qquad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 2

Soient A un anneau principal et K le corps des fractions de A. On définit le *contenu* d'un polynôme $P \in A[X]$ comme le pgcd de ses coefficients et on le note $\mathrm{cont}(P)$ (il est donc défini à un inversible de A près). On dit que P est *primitif* si son contenu vaut 1.

(1) Soient P, Q deux polynômes primitifs de $A[X]$. Montrer que $\mathrm{cont}(PQ) = 1$.

(2) En déduire que pour tous $P, Q \in A[X]$, $\mathrm{cont}(PQ) = \mathrm{cont}(P)\mathrm{cont}(Q)$.

(3) Montrer que pour tout $P \in A[X]$ non constant, on a l'équivalence suivante :

$$P \text{ irréductible dans } A[X] \Longleftrightarrow P \text{ primitif et } P \text{ irréductible dans } K[X].$$

Ce résultat est appelé *lemme de Gauss*.

Exercice 3

(1) Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$.

$$X^4 + X + 1, \qquad X^6 + X^2 + 1$$

(2) Sont-ils irréductibles sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 4

Le but de cet exercice est de démontrer le *critère d'Eisenstein*, qui est le théorème suivant :
Soit A un anneau principal et $K = \mathrm{Frac}(A)$ son corps des fractions. Soit $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soit p un élément premier de A. Supposons :
- $p \nmid a_n$
- pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $p \mid a_k$
- $p^2 \nmid a_0$.

Alors f est irréductible dans $K[X]$.

Exercice 5

Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

(a) $2X^7 + 15X^2 - 45$

(b) pour tout $n \geqslant 1$, $\quad X^n - 2$

(c) $X^4 + -X^3 + 2X + 1$

(d) pour tout nombre premier p, $\quad X^{p-1} + \cdots + X + 1$.

Extensions de corps, éléments algébriques

Exercice 6

(1) Montrer que les nombres suivants sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et donner leur polynôme minimal :

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{4+2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt[3]{2}$$

(2) Même question sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(3) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que les nombres suivants sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et donner leur polynôme minimal :

$$j\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \qquad i+\sqrt{2}, \qquad j+\sqrt{3}, \qquad i+j.$$