Feuille de TD n° 3

Endomorphismes d'un espace vectoriel : polynômes d'endomorphismes, réduction

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel dont une base est $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(1) Soit $f \in L(E)$ défini par $f(e_1) = 2e_1$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2$, $f(e_3) = 3e_3$. Montrer que son polynôme minimal est $\mu_f = (X-2)^2(X-3)$.

(2) Soit $f \in L(E)$ défini par $f(e_1) = 2e_1$, $f(e_2) = 2e_2$, $f(e_3) = e_1 + 3e_3$. Montrer que son polynôme minimal est $\mu_f = (X-2)(X-3)$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'endomorphisme défini par $c \mapsto c \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$.

(1) Montrer que son polynôme minimal μ_f divise $X^3 - 1$.

(2) En déduire que $\mu_f = X^2 + X + 1$.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ dont le polynôme minimal unitaire est $P_\alpha(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Soit $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$ l'endomorphisme $\mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha)$ défini par $c \mapsto c \cdot \alpha$. Montrer que son polynôme minimal unitaire est $\mu_f = P_\alpha(X)$.

Exercice 4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 2, dont $\{e_1, e_2\}$ est une base. Soient a, b deux éléments de K et $P(X) = (X-a)(X-b)$.

(1) Supposons que $a \neq b$. Définir un endomorphisme $f \in L(E)$ (en donnant les images de e_1 et e_2) dont le polynôme minimal est $\mu_f = P(X)$.

(2) Supposons que $a = b$. Définir un endomorphisme $f \in L(E)$ (en donnant les images de e_1 et e_2) dont le polynôme minimal $\mu_f = X - a$.

(3) Supposons que $a = b$. Définir un endomorphisme $f \in L(E)$ (en donnant les images de e_1 et e_2) dont le polynôme minimal $\mu_f = P(X)$.

Exercice 5

Soit $f \in L(E)$ admettant un polynôme minimal $\mu_f = (X-a)(X-b)$

(1) Si $a \neq b$, montrer que $f^m = \frac{a^m - b^m}{a-b} f + \frac{ba^m - ab^m}{b-a} id_E$.

(2) Si $a = b$, montrer que $f^m = ma^{m-1} f + (1-m)a^m id_E$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur K. Existe-il un endomorphisme $f \in L(E)$ dont le polynôme minimal unitaire est $X^{10} + X^3 + 1$?

Exercice 7

Soit $f \in L(E)$ et soit μ_f le polynôme minimal de f.

(1) Montrer que f est inversible si et seulement si $\mu_f(0) \neq 0$. Si c'est le cas, montrer que $f^{-1} \in K[f]$.

(2) Soit $P \in K[X]$, supposons que $P(f)$ est inversible, montrer que $P(f)^{-1} \in K[f]$, en déduire que P est premier avec μ_f.

(3) Réciproquement, soit $P \in K[X]$ premier avec μ_f montrer que $P(f)$ est un endomorphisme inversible.

(4) En déduire que $K[f]$ est un corps si et seulement si μ_f est irréductible sur K.

Exercice 8

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ un endomorphisme.

(1) Donner la définition de « f est nilpotent ».

(2) Supposons que pour tout $x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

(3) Si on ne suppose pas que la dimension de E est finie, l'énoncé précédent n'est plus vrai : pour $car(K) = 0$ soient $E = K[X]$ et $D : P(X) \mapsto P'(X)$, vérifier que D satisfait l'hypothèse de l'énoncé précédent et montrer que D n'est pas nilpotent. Pour $car(K) = p \geq 0$, on définit une application linéaire $D_0 : K[X] \to K[X]$ par $D_0(1) = 0$ et $D_0(X^n) = X^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que D_0 satisfait l'hypothèse de l'énoncé précédent et montrer que D_0 n'est pas nilpotent.

Exercice 9

Soit $E_n = \{P \in K[X]; \deg(P) \leq n\}$. Soit $f \in L(E)$ l'endomorphisme défini par

$$f(P) = P(X+1) - P(X).$$

(1) Montrer que f est nilpotent.

(2) Pour $n = 3$, donner une base explicite de E_3 sous laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Pour $P \in K[X]$, on pose $g = P(f)$.

(1) Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(ker(g^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante puis stationnaire.

(2) Supposons que P est irréductible. Pour $x \in ker(P^k(f)) \backslash ker(P^{k-1}(f))$, montrer que le polynôme minimal local en x de f est $\mu_{f,x} = P^k$.

Exercice 11

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset E$ admet un supplémentaire stable par f si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$. Si c'est le cas, montrer que ce supplémentaire est $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 12

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E nilpotent. Notons r son ordre de nilpotence. Montrer que f est cyclique si et seulement si $n = r$.

Réduction d'endomorphismes

Exercice 13

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer le polynôme caractéristique de A. Donner les valeurs propres de A et leur multiplicité.

(b) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

(2) (a) Calculer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) (a) Expliciter les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n + b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 6a_n - b_n + 6c_n \\ c_{n+1} = 6a_n - 2b_n + 7c_n \end{cases}$.

Exercice 14

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

(1) Rappeler la définition d'un projecteur de E et d'une symétrie de E.

(2) Montrer qu'un projecteur est diagonalisable.

(3) Montrer que si la caractéristique de K est différente de 2, une symétrie est toujours diagonalisable. Donner un contre-exemple en caractéristique 2.

Exercice 15

Soit K un corps fini de cardinal q. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer que u est diagonalisable sur K si et seulement si $X^q - X$ annule f.

Exercice 16

Que pensez-vous de la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton ?

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(x) = \det(u - x\mathrm{id})$. En remplaçant l'indéterminée x par u, il vient

$$\chi_u(u) = \det(u - u) = \det(0) = 0,$$

donc le polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u.

Exercice 17

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Calculer le polynôme caractéristique de f. Est-ce que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

(b) Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Est-ce que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

(2) Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Donner l'ordre de nilpotence r_1 de $(f - \mathrm{id})_{|F_1}$ et l'ordre de nilpotence r_2 de $(f - 2\mathrm{id})_{|F_2}$.

(3) Soit $x \in F_2 \subset \mathbb{R}^4$ tel que $x \notin \ker(f - 2\mathrm{id})^{r_2-1}$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r_2}) = ((f-2\mathrm{id})^{r_2-1}(x), (f-2\mathrm{id})^{r_2-2}(x), \ldots, x)$ forme une base de F_2.

(4) Compléter cette famille libre en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de f dans cette base.