Université Paris Diderot | Algèbre 2
L3 mathématiques | année 2015-2016

# Feuille de TD n° 4
## *Commutants d'endomorphismes*

**Exercice 1**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $K$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $C(f) \subset \mathscr{L}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes $g$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

(1) Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

(2) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que $h \circ C(f) \circ h^{-1} = C(h \circ f \circ h^{-1})$

(3) Soit $h \in C(f)$, montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par $h$. En déduire que $h$ stabilise les espaces propres de $f$.

(4) Montrer que $\{P(f); P \in K[X]\} \subseteq C(f)$.

(5) Donner un $f$ tel que $\{P(f); P \in K[X]\} \neq C(f)$.

(6) Soit $f$ un endomorphisme diagonal dans une base $B$ de $E$ dont les valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que $C(f) = \{$endomorphismes diagonaux dans la base $B\}$.

(7) Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que $\{P(f); P \in K[X]\} = C(f)$.

(8) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $E$. Soit $J_n \in \mathscr{L}(E)$ tel que $J_n(e_1) = 0$ et $J_n(e_k) = e_{k-1}$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$. Montrer que $\{P(J_n); P \in K[X]\} = C(J_n)$.

(9) En déduire que les endomorphismes qui commutent avec tout $f \in \mathscr{L}(E)$ sont les homothéties. Autrement dit,

$$\bigcap_{f \in \mathscr{L}(E)} C(f) = K.$$

(10) Soient $n = 2$ et $J_2$ comme ci-dessus. Construire $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h \notin C(J_2)$ mais $h$ stabilise les espaces propres de $J_2$.