Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Algèbre 2
année 2015-2016

Feuille de TD n° 5
Transvections, dilatations

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E) \setminus \{id_E\}$ est une transvection s'il existe un hyperplan (passant par 0_E) H tel que
– $f_{|H} = id_H$,
– $f(x) - x \in H$ pour tout $x \in E$.

(1) Déterminer le polynôme minimal d'une transvection. Trouver les valeurs propres d'une transvection. Une transvection est-elle diagonalisable ?

(2) Une projection sur un sous-espace vectoriel donné est-elle une transvection ?

(3) Parmi les endomorphismes correspondant aux matrices suivantes, lesquels sont des transvections ? Déterminer leurs polynômes minimaux. Le polynôme minimal caractérise-t-il une transvection ?

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 7 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 2 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & 3 & \\ & & 1 & \\ & & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Soient f et g deux transvections distinctes. Est-ce que $f+g$ peut être une transvection ? Donner un exemple tel que $f \circ g$ est une transvection. Donner un autre exemple tel que $f \circ g$ n'est pas une transvection.

(5) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Soient $v = \sum a_i e_i \in E$ avec $a_i \in K$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(e_i) = e_i$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $f(e_n) = v$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que f soit une transvection.

(6) Soit f un endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Écrire f comme un produit de certaines transvections et d'un endomorphisme diagonal. Même question pour $N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(7) Soit f un endomorphisme dont la matrice dans une base $\mathscr{B}$ de E est $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ avec $a \neq 1$. Écrire f comme un produit de certaines transvections et de l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit K un corps. Pour tous $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K^*$, on définit la matrice

$$B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \in \mathscr{M}_n(K),$$

où la matrice E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et colonne j qui vaut 1.

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(K)$ peut s'écrire comme le produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$.

(1) Soit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Que font les opérations suivantes sur les lignes et les colonnes de A ?

$$B_{ij}(\lambda)A \qquad \text{et} \qquad AB_{ij}(\lambda).$$

(2) Calculer les produits matriciels $B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)$ et $B_{ij}(-1)B_{ji}(1)B_{ij}(-1)$.

(3) Soit $A \in \mathrm{SL}(n, K)$.

(a) Montrer qu'en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice contenant un coefficient 1. (*Indication : on pourra distinguer deux cas, selon qu'il existe une ligne ou une colonne de A contenant deux coeffcients non nuls, ou si toute ligne ou colonne de A ne contient qu'au plus un coefficient non nul.*)

(b) en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice contenant un coefficient 1 en première ligne et première colonne.

(c) en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(4) Montrer par récurrence que toute matrice $A \in \mathrm{SL}(n, K)$ peut s'écrire comme un produits de matrices de transvection $B_{ij}(\lambda)$.

(5) Avec cette méthode, combien de matrices $B_{ij}(\lambda)$ au plus sont-elles nécessaires pour décomposer A ?

(6) Montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}(n, K)$ se décompose en un produit de transvections et d'une dilatation.

(7) (a) Faire le lien entre ce qui précède et la méthode du pivot de Gauss.

(b) Décomposer les matrices suivantes $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ en produit de transvections et $B \in \mathrm{GL}(n, K)$ en produits de transvections et d'une dilatation :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre minimal de transvections nécessaires pour écrire un élément du groupe spécial linéaire.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathrm{SL}(E)$. Notons

$$F_u = \{x \in E \mid u(x) = x\}$$

le sous-espace vectoriel des points fixes de u, et $p_u = n - \dim F_u \in \mathbb{N}$.

(1) Soit $(e_1, \dots, e_{n-p})$ une base de F_u. On la complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Notons $G_u = Vect(e_{n-p+1}, \dots, e_n)$.

(a) Montrer que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{n-p} & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right),$$

avec $A \in \mathrm{SL}(p, K)$.

(b) Rappeler pourquoi G_u est un supplémentaire de F_u. Notons u_F et u_G les deux endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$,

$$u(x) = u_F(x) + u_G(x), \text{ et } u_F(x) \in F_u \text{ et } u_G(x) \in G_u.$$

Montrer que A est la matrice de l'application $\bar{u}$ égale à u_G restreinte à G_u dans la base $(e_{n-p+1}, \dots, e_n)$.

(2) On suppose $u \neq id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\bar{u}$ est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$.

(ii) Il existe une base de G_u dans laqelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \lambda \neq 1.$$

On appelle *exceptionnel* un élément $u \in \mathrm{SL}(E)$ tel que $u \neq \mathrm{id}$ vérifiant (i) et (ii).

(3) (a) Dans le cas $n = 2$, quels sont les éléments exceptionnels de $\mathrm{SL}(E)$?

(b) Peut-il exister $u \in \mathrm{SL}(E)$ exceptionnel avec $p_u = 1$?

(c) Soit u une homothétie et τ une transvection. Calculer $p_{\tau u}$. En déduire que τu n'est pas exceptionnel.

(4) Pour tout $u \in \mathrm{SL}(E)$, on pose $m_u = \min\{m \in \mathbb{N} \mid u = \tau_1 \dots \tau_m, \ \text{ avec } \tau_1, \dots, \tau_m \text{ transvections}\}$. Si $u = \mathrm{id}$, on considère par convention $m_u = 0$.

(a) Montrer l'inégalité $m_u \geqslant p_u$.

(b) Montrer que si u est exceptionnel $m_u \geqslant p_u + 1$.

(5) On suppose $n = \dim E \geqslant 3$ et on suppose que u n'est pas une homothétie.

(a) Montrer qu'il existe $a, b, c \in E$ linéairement indépendants tels que

(A) $u(b) = c$,

(B) $u(a) \notin Vect(a, c)$.

(b) On suppose $u \neq \mathrm{id}$ et u non exceptionnelle. On suppose que $\bar{u}$ n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une transvection τ telle que $F_u \subsetneq F_{\tau u}$ et $p_{\tau u} = p_u - 1$. (*Indication : On pourra prendre $b \in E$ tel que b_G ne soit pas vecteur propre pour $\bar{u}$ et, si $c = u(b)$, prendre une transvection de droite engendrée par $b - c$.*)

(c) Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, montrer qu'on peut trouver une transvection τ telle que τu ne soit pas exceptionnel. *Indication : On pourra distinguer les cas $p_u = 2$ et $p_u > 2$. Si $p_u > 2$, imposer à l'hyperplan de τ de contenir un élément a tel que $\bar{u}(a_G) \notin Vect(a_G, c_G)$.)*

(d) On suppose $u \neq \mathrm{id}$ et u non exceptionnelle. On suppose que $\bar{u}$ est une homothétie. Vérifier que $\bar{u} = \mathrm{id}$ et montrer qu'il existe une transvection τ telle que τu n'est pas exceptionnel et $F_u \subsetneq F_{\tau u}$.

(6) Montrer par récurrence sur p_u que si u n'est pas exceptionnel, alors $m_u = p_u$.

(7) Montrer que si u est une homothétie différente de l'identité, on a $m_u = n + 1$. En déduire que si u est exceptionnel, $m_u = p_u + 1$.