

Interrogation écrite 2 (07/03/2018 durée : 1 heure)

(Documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Toute réponse doit être justifiée.)

Exercice 1 (4 points)

On désigne par $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 .

1. Si $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ appartient à $M_2(\mathbb{C})$, que vaut $\det B$? (1 point)
2. Soit B un élément inversible de $M_2(\mathbb{C})$; exprimer $\det(B^{-1})$ en fonction de $\det B$. (1 point)
3. Soient B_1 et B_2 deux éléments de $M_2(\mathbb{C})$; exprimer $\det(B_1 B_2)$ en fonction de $\det B_1$ et $\det B_2$. (1 point)
4. Soit $B = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$, calculer le déterminant $\det(C^3)$ où C est l'inverse de B . (1 point)

Exercice 2 (5 points)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer son inverse ou démontrer que A n'est pas inversible. (3 points)
2. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x + y + 6z = \pi \\ -x - 3z = \mathbf{i} \\ 2x + y + 7z = \frac{1}{e} \end{cases} .$$

(2 points)

Exercice 3 (13 points)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré ≤ 3 . (Convention : $\deg(0) = -\infty$.)

1. Que signifie H est un sous-espace vectoriel de E ? (1 point)
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(\mathbf{i}) = 0\}$. Montrer que F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de E . (2 points)
3. Soit $G = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $P_1 = X^2 + 3X + 1$, $P_2 = 2X - 1$ et $P_3 = 2X^2 + 5$. Trouver une base de G . (3 points)
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$. (2 points)
5. Montrer que tout élément u de E s'écrit $u = v + w$ où v désigne un élément de F et w un élément de G , autrement dit que $E = F + G$. [*Indication : effectuer la division euclidienne d'un élément quelconque de E par $X^2 + 1$ et exprimer le reste comme une combinaison linéaire d'une base de G (mod $X^2 + 1$).*] (3 points)
6. Bonus : En déduire la dimension de F . (2 points)