Interrogation écrite 2, éléments de correction

Exercice 1 *On désigne par $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2.*

1. *Si* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *appartient à* $M_2(\mathbb{C})$, *alors* $\det B = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$.
2. *Soit B un élément de $M_2(\mathbb{C})$; on a* $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.
3. *Soient B_1 et B_2 deux éléments de $M_2(\mathbb{C})$; on a* $\det(B_1B_2) = \det B_1 \det B_2$.
4. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$*; notons C l'inverse de B. D'après ce qui précède*

$$\det(C^3) = \det(C)^3 = \det(B^{-1})^3 = \left(\frac{1}{\det B}\right)^3.$$

Or $\det B = 13 \times 4 - 11 \times 5 = 52 - 55 = -3$ *donc* $\det(C^3) = \left(\frac{1}{-3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$.

Exercice 2

1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ *est inversible et son inverse vaut*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Le système d'équations linéaires*

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 6z & = & \pi \\ -x \qquad - 3z & = & \mathbf{i} \\ 2x + y + 7z & = & \frac{1}{e} \end{array} \right.$$

se réécrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \pi \\ \mathbf{i} \\ \frac{1}{e} \end{pmatrix}$. *Or on vient de voir que la matrice A est inversible donc $X = A^{-1}B$. Comme*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le système (S) a pour solution

$$\left\{ \left(\frac{(3\pi e - \mathbf{i}e - 3)}{e}, \pi + 2\mathbf{i}, \frac{1 - \pi e}{e} \right) \right\}$$

Exercice 3 *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré ≤ 3. (Convention:* $\deg(0) = -\infty$.*)*

1. *On dit que H est un sous-espace vectoriel de E si H est un sous-ensemble de E, si $H \neq \emptyset$ et si pour tous u, v dans H et pour tout λ dans $\mathbb{R}$ alors $\lambda u + v$ appartient à H.*

2. *Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(\mathbf{i}) = 0\}$. Bien sûr F est par définition un sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[X]$. Le polynôme nul prend en particulier la valeur 0 en $\mathbf{i}$ donc le polynôme nul appartient à F. Soient P et Q dans F, soit λ dans $\mathbb{R}$, alors $\lambda P + Q$ est un polynôme de degré ≤ 3 et*

$$(\lambda P + Q)(\mathbf{i}) = \lambda P(\mathbf{i}) + Q(\mathbf{i}) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

   Par suite F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E.

3. *Soit $G = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $P_1 = X^2 + 3X + 1$, $P_2 = 2X - 1$ et $P_3 = 2X^2 + 5$. On remarque que $2P_1 - 3P_2 - P_3 = 0$. Par conséquent* $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, 2P_1 - 3P_2) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. *La famille (P_1, P_2) est libre; en effet soient λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$. On a*

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1(X^2 + 3X + 1) + \lambda_2(2X - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 X^2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

   Or $\lambda_1 X^2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ soit si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Il en résulte que la famille (P_1, P_2) est une base de G.

4. *Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit P un polynôme de $F \cap G$. D'une part $P(\mathbf{i}) = 0$, d'autre part $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. Ainsi $\lambda_1 P_1(\mathbf{i}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{i}) = 0$. Or $P_1(\mathbf{i}) = \mathbf{i}^2 + 3\mathbf{i} + 1 = 3\mathbf{i}$ et $P_2(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} - 1$ donc $\lambda_1 P_1(\mathbf{i}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{i}) = (3\lambda_1 + 2\lambda_2)\mathbf{i} - \lambda_2$. Il s'en suit que $\lambda_1 P_1(\mathbf{i}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{i}) = 0$ si et seulement si $(3\lambda_1 + 2\lambda_2)\mathbf{i} - \lambda_2 = 0$ si et seulement si $3\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 = 0$ soit si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ou encore si et seulement si $P = 0$.*

5. *Montrons que tout élément u de E s'écrit $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$, autrement dit que $E = F + G$. Soit P un élément de E ; effectuons la division euclidienne de P par $X^2 + 1$:*

$$P = (X^2 + 1)Q + R$$

   où Q et R désigne des polynômes à coefficients réels et $\deg R < \deg(X^2+1) = 2$. *Autrement dit* $\deg R \leq 1$. *Notons que $S = (X^2+1)Q$ est un élément de F puisque $S(i) = (i^2+1)Q = 0$. Le polynôme R est de la forme $aX + b$, or $aX + b = \left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right) P_1 - bP_2 - \left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right)(X^2 + 1)$. Finalement il existe un polynôme Q et des réels a et b tels que*

$$P = \underbrace{(X^2 + 1)\left(Q - \left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right)\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right) P_1 - bP_2\right)}_{\in G}$$

6. *Déterminons la dimension de F. Comme $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$, on a* $\dim E = \dim F + \dim G$. *Or* $\dim E = 4$ *et d'après ce qui précède* $\dim G = 2$ *(car la famille (P_1, P_2) est une base de G) donc* $\dim F = 4 - 2 = 2$.