Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bernhard Keller et Yongqi Liang

Année 2017-2018
MMAL2 - Algèbre élémentaire II, 51BE01MT

Interrogation écrite 3

5 avril 2018

Questions de cours

1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.

2. Soient $f : E \to E'$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ une base de E'. Définir la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

3. Avec les notations du point précédent, soient $\mathcal{B}_1$ une deuxième base de E et $\mathcal{B}'_1$ une deuxième base de E'. Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'_1$. Quelle est la matrice B de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$?

Exercice 1. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Quelle est la forme échelonnée réduite de A ?

2. Donner une base du noyau de A.

3. Quel est le rang de A ?

4. De la suite des vecteurs colonnes de A, extraire une base de l'image de A.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $s : E \to E$ l'application qui envoie un polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(1 - X)$.

1. Quelle est la matrice A de s dans la base $1, X, X^2, X^3$ de E ?

2. Montrer que s est une symétrie et déduire que $A^2 = I_4$.

3. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Exhiber des bases de F et G. Indication : on pourra considérer les puissances de $Q(X) = X - 1/2$.

4. Quelle est la matrice de s dans la réunion des bases obtenues de F et G ?