Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bernhard Keller et Yongqi Liang

Année 2017-2018
MMAL2 - Algèbre élémentaire II, 51BE01MT

Une correction de l'interrogation écrite 3

5 avril 2018

Questions de cours

1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.

2. Soient $f : E \to E'$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ une base de E'. Définir la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

3. Avec les notations du point précédent, soient $\mathcal{B}_1$ une deuxième base de E et $\mathcal{B}'_1$ une deuxième base de E'. Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'_1$. Quelle est la matrice B de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$?

Solution.

1. Pour tout $y_1, y_2 \in F$ il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Comme f est linéaire, $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$ pour tout $\alpha, \beta \in K$. Alors $f^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha f^{-1}(y_1) + \beta f^{-1}(y_2)$, la réciproque f^{-1} est donc aussi linéaire.

2. Les coefficients de la j-ième colonne de A sont les coordonnées de $f(\beta_j) \in E'$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, la matrice $A = (a_{i,j})$ est définie par les équations

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(\beta_1) & = & a_{1,1}\beta'_1 & + & a_{2,1}\beta'_2 & + & \ldots & + & a_{n,1}\beta'_n \\
f(\beta_2) & = & a_{1,2}\beta'_1 & + & a_{2,2}\beta'_2 & + & \ldots & + & a_{n,2}\beta'_n \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & \\
f(\beta_j) & = & a_{1,j}\beta'_1 & + & a_{2,j}\beta'_2 & + & \ldots & + & a_{n,j}\beta'_n \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & \\
 & \cdots & & & & \cdots & & & \\
f(\beta_p) & = & a_{1,p}\beta'_1 & + & a_{2,p}\beta'_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}\beta'_n
\end{array}$$

3. On a $B = Q^{-1}AP$.

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Quelle est la forme échelonnée réduite de A ?

2. Donner une base du noyau de A.

3. Quel est le rang de A ?

4. De la suite des vecteurs colonnes de A, extraire une base de l'image de A.

Solution.

1. D'après la méthode du pivot de Gauss, la forme échelonnée réduite de A est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Le vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ forme une base du noyau de A.

3. Le rang de A est 3 d'après la première question.

4. La première, la deuxième et la quatrième colonnes forment une base de l'image de A car ces trois colonnes contiennent un pivot dans la forme échelonnée réduite de A.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $s : E \to E$ l'application qui envoie un polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(1-X)$.

1. Quelle est la matrice A de s dans la base $1, X, X^2, X^3$ de E ?

2. Montrer que s est une symétrie et déduire que $A^2 = I_4$.

3. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Exhiber des bases de F et G. Indication : on pourra considérer les puissances de $Q(X) = X - 1/2$.

4. Quelle est la matrice de s dans la réunion des bases obtenues de F et G ?

Solution.

1. Comme
$$\begin{array}{rcl} s(1) & = & 1, \\ s(X) & = & 1 - X, \\ s(X^2) & = & 1 - 2X + X^2, \\ s(X^3) & = & 1 - 3X + 3X^2 - X^3, \end{array}$$
la matrice de s dans la base $1, X, X^2, X^3$ est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. L'image de $P(1-X)$ par s est $P(1-(1-X)) = P(X)$, d'où $s \circ s = \mathrm{id}_E$ et l'application s est une symétrie. Comme la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices, on a $A^2 = I_4$.

3. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E. Soit $Q = X - \frac{1}{2}$. On trouve que $s(Q) = 1 - X - \frac{1}{2} = -Q$. Alors $1, Q^2 \in F$ et $Q, Q^3 \in G$. De plus ces 4 éléments sont linéairement indépendants car ils sont de degrés distincts. Comme $\dim(F) + \dim(G) = 4$, on a forcément $\dim(F) = \dim(G) = 2$. Donc $1, Q^2$ forment une base de F et Q, Q^3 forment une base de G. [Remarque. On a un nombre infini de réponses correctes pour cette question, par exemple $1, Q^2 - 1$ forment aussi une base de F.]

4. Comme $s_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$, la matrice de s est $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ dans n'importe quelles bases obtenues à la question précédente.