# Intégrales à paramètres

## 1 Théorèmes fondamentaux

**Théorème 1. (Théorème de convergence dominée)** *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Supposons que*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *p.p.* $x \in E$;
2. *Il existe une fonction mesurable, positive et intégrable* $g: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *appelée une* majoration, *t.q. pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in E$.

*Alors* $f$ *et* $f_n$ *sont intégrables pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

*De plus* $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0$.

**Théorème 2. (Continuité)** *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: E \times \Lambda \to \mathbb{C}$ une fonction t.q. pour tout $t \in \Lambda$, la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t)$ est mesurable. Supposons que*

1. *La fonction* $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x,t)$ *est continue p.p.* $x \in E$;
2. *Il existe une fonction mesurable, positive et intégrable* $g: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *t.q. pour tout* $t \in \Lambda$, *on ait* $|f(x,t)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in E$.

*Alors la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t)$ est intégrable pour tout $t \in \Lambda$, et la fonction*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

*est continue.*

**Théorème 3. (Dérivabilité)** *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f: E \times \Lambda \to \mathbb{C}$ une fonction t.q. pour tout $t \in \Lambda$, la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t)$ est mesurable. Supposons que*

1. *La fonction* $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable p.p.* $x \in E$;
2. *Il existe une fonction mesurable, positive et intégrable* $g: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *t.q. pour tout* $t \in \Lambda$, *on ait* $|\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in E$.

*De plus, si on suppose qu'il* ***existe*** *$t_0 \in \Lambda$ t.q. la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t_0)$ est intégrable. Alors la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t)$ est intégrable pour tout $t \in \Lambda$, et la fonction*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

*est dérivable, et on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

**Démonstration.** Pour tout $t \in \Lambda$, on a $|f(x,t) - f(x,t_0)| \leq |t - t_0| \sup_{\xi\in\Lambda} |\partial_t f(x,\xi)| \leq |t - t_0|\, g(x)$ donc $x \mapsto f(x,t) - f(x,t_0)$ est intégrable. Comme $x \mapsto f(x,t_0)$ est intégrable, $x \mapsto f(x,t)$ l'est aussi. Le reste se trouve dans le polycopié. $\square$

Les énoncés sont reorganisés pour afficher la similarité.

# 2 Stratégie pour étudier les intégrales à paramètres

Poursuivre les étapes suivantes pour étudier la fonction $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x$

1. (Facultatif) Montrer que pour tout $t \in \Lambda$, la fonction $E \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,t)$ est intégrable.
2. **(Continuité)** Quand $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x,t)$ est continue p.p. $x \in E$,
   a. **(Majoration globale)** Trouver une fonction $g: E \to \mathbb{C}$ t.q. pour tout $t \in \Lambda$, on ait $|f(x,t)| \leq g(x)$ p.p. $x \in E$. Un choix « universel » mais pas nécessairement le plus simple: $g(x) := \sup_{t \in \Lambda} |f(x,t)|$.
   b. **(Majoration locale)** S'il n'y a pas de majoration globale, pour tout intervalle **compact** $I \subseteq \Lambda$, trouver une fonction $g_I: E \to \mathbb{C}$ t.q. pour tout $t \in I$, on ait $|f(x,t)| \leq g_I(x)$ p.p. $x \in E$. Un choix « universel »: $g_I(x) := \sup_{t \in I} |f(x,t)|$.

   Si l'on trouve une majoration globale $g$ ou des majorations locales $(g_I)_{I \subseteq \Lambda}$, on peut en déduire que la fonction $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x$ est continue.
3. **(Dérivabilité)** Quand $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x,t)$ est dérivable p.p. $x \in E$, si la fonction $\Lambda \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x$ est continue,
   a. **(Majoration globale)** Trouver une fonction $h: E \to \mathbb{C}$ t.q. pour tout $t \in \Lambda$, on ait $|\partial_t f(x,t)| \leq h(x)$ p.p. $x \in E$. Un choix « universel » mais pas nécessairement le plus simple: $h(x) := \sup_{t \in \Lambda} |\partial_t f(x,t)|$.
   b. **(Majoration locale)** S'il n'y a pas de majoration globale, pour tout intervalle **compact** $I \subseteq \Lambda$, trouver une fonction $h_I: E \to \mathbb{C}$ t.q. pour tout $t \in I$, on ait $|\partial_t f(x,t)| \leq h_I(x)$ p.p. $x \in E$. Un choix « universel »: $h_I(x) := \sup_{t \in I} |\partial_t f(x,t)|$.

   Si l'on trouve une majoration globale $g$ ou des majorations locales $(g_I)_{I \subseteq \Lambda}$, on peut en déduire que la fonction $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_E f(x,t)\,\mathrm{d}x$ est dérivable, dont la dérivée est $\Lambda \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$.