1 Séance 3 fév 2021

Définition 1. *Une* relation d'équivalence $\sim$ *sur un ensemble E:* $\sim \subseteq E \times E$

1. reflexivité*:* $\forall x \in E : x \sim x$
2. symétrie*:* $\forall (x, y) \in E^2 : (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$
3. transitivité*:* $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

Exercice. (Ch1 Ex0.1) Relation d'équivalence? Si oui, déterminer les cl d'éq & quotient

1. **$(\mathbb{R}, \leq)$.**
2. **$(\mathbb{Z}, \sim)$ où $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.**
3. $(\mathbb{Z}, \sim)$ où $x \sim y \Leftrightarrow 2 \mid x - y$ (pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \mid b$ si'il existe $c \in \mathbb{Z}$ t.q. $b = a c$)
4. **$(\{0, 1\}, \neq)$.**
5. $(\mathbb{R}^2, \sim)$ où $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x'$.

Solution.

1. $0 \leq 1$ mais $1 \nleq 0$, donc $\leq$ n'est pas une rel d'éq.
2. $|0 - 1| \leq 1$, $|1 - 2| \leq 2$ mais $|0 - 2| \nleq 1$, donc $|\cdot - \cdot| \leq 1$ n'est pas une relation d'éq.
3. Oui: 0 est pair; si $x - y$ est pair, alors $y - x$ l'est aussi; si $x - y, y - z$ sont pairs, alors $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair. Il y a 2 cls d'éq: $\{\text{pairs}\}, \{\text{impairs}\}$. L'ensemble quotient: $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \{\{\text{pairs}\}, \{\text{impairs}\}\}$
4. Ce n'est pas réflexive: $0 = 0$.
5. Oui. Les cls d'éq: $C_x := \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ « les droites verticales ». L'ensemble quotient: $\{C_x \mid x \in \mathbb{R}\}$. On peut identifier C_x avec $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les éléments $(x', y') \sim (x, y)$ ssi $x = x'$.

Exemple 2. Pour $\mathbb{R}$, la relation $x \sim y \stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'éq. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C_x := x + \mathbb{Q} = \{x + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$. Il n'y pas de forme très simplifié pour cet ensemble quotient.

Définition 3. *Un ensemble E de foncs $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est dit* universellement stable *ssi*

1. **(limite d'une *suite*)** $\forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}} : (\forall x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)) \Longrightarrow f \in E$
2. **(opération d'algèbre)** $\forall f \in E, \forall g \in E : f + g \in E$ *et* $f g \in E$.
3. $\forall f \in E, \forall L \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : f \circ L \in E$ *où* $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \mathbb{R}^d + \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

   (quand $d = 1$, $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f(x) = a x + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$*, quand $d = 2$,* $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$*)*
4. **(sup et inf *dénombrable*)** $\forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in E$ *et* $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in E$.
5. **(division)** $\forall f \in E, \forall g \in E : (\forall x \in \mathbb{R}^d : g(x) \neq 0) \Longrightarrow f / g \in E$.

Remarque 4. (sup et inf finie) Pour $(f, g) \in E^2$: $\min(f, g) \in E$ et $\max(f, g) \in E$. En effet, prendre la suite $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et $f_n = g$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \max\{f, g\}$ et $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = \min\{f, g\}$.

Remarque 5. 4 implique 1: soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, la limite $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, par 4, on a $E \ni g_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sup_{n \geq k} f_k(x)$. Alors $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} g_k(x)$, donc $f \in E$ par 4. On a utilisé le lemme.

Lemme 6. *Soit* $(a_n) \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existe (dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). On note* $a := \lim_n a_n$*. Alors* $a = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n$*.*

Démonstration. Quand $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $n \geq k$, on a $|a_n - a| < \varepsilon$, donc pour tout $k' \geq k$: $|\sup_{n\geq k'} a_n - a| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n = a$. Le cas $a = +\infty$ est similaire. □

Définition 7. *Une* tribu*, ou une* σ-algèbre *sur un esemble* X*: Un ensemble* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *t.q.*

1. **(non-vide)** $\mathcal{A} \neq \varnothing$
2. **(complémentaire)** $\forall E \in \mathcal{A}$: $X \setminus E \in \mathcal{A}$.
3. **(union dénombrable)** $\forall (E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$: $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Remarque 8. C'est important que l'union en question est dénombrable.

Exercice. (Ch1 Ex1.3) Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une tribu. Montrer que

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$.
2. **(union finie)** $\forall (E, F) \in \mathcal{A}^2$: $E \cup F \in \mathcal{A}$.
3. **(intersection dénombrable)** $\forall (E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$: $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Solution.

1. Comme $\mathcal{A} \neq \varnothing$, il existe $E \in \mathcal{A}$. Alors $X \setminus E \in \mathcal{A}$, donc $X = E \cup (X \setminus E) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$.
2. On prend la suite $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ donné par $E_0 := E$ et $E_n := F$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Alors $\mathcal{A} \ni \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = E \cup F$.
3. $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := X \setminus E_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n) \in \mathcal{A}$. $X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Remarque 9. (intersection finie) Une tribu est aussi stable par intersection finie.

Remarque 10. (complément rélatif) Pour tout $E, F \in \mathcal{A}$, on a $E \setminus F \in \mathcal{A}$. En effet, $E \setminus F = E \cap (X \setminus F)$.

Pré-définition 11. Fonctions mesurables $f \in \mathcal{M}$ *(*$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*)*, l'intégrale de Lebesgue $\int$ *sur* $\mathcal{M}^+$*:*

1. $1_U \in \mathcal{M}$ *pour tout ouvert* $U \subseteq \mathbb{R}^d$*.*
2. $C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}$*.*
3. $\mathcal{M}$ *est universellement stable.*

L'intégrale de Lebesgue $\int$*:*

1. $\forall (f, g) \in (\mathcal{M}^+)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$: $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.
2. *Pour* $a_1 \leq b_1, \ldots, a_d \leq b_d$*, on a* $\int 1_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$*.*
3. **(Beppo-Levi = convergence croissante)** *Soit* $(f_n) \in (\mathcal{M}^+)^{\mathbb{N}}$ *une suite* ***croissante****, alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

4. *Pour toute* $f \in \mathcal{M}^+$ *t.q.* $\int f < +\infty$*, alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_{\geq 0})$ *(*C_c *est l'ensemble de fonctions continues dont le support est compact, c'est-à-dire, il existe un ensemble* $K \subseteq_{\text{cpct}} \mathbb{R}^d$ *t.q. pour tout* $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$*, on a* $\varphi(x) = 0$*). t.q.* $\int |f - \varphi| < \varepsilon$*.*

Remarque 12. $C^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})\subseteq\mathcal{M}$ est stable par somme, produit, composition à droite par des apps affines et par division, mais il n'est pas stable par limite d'une suite ou par sup ou inf (opération « analytique »).

Remarque 13. ($\mathcal{M}$ stable par $-$) Tout d'abord, les fonctions contantes sont continues, donc $\in\mathcal{M}$. En particulier, $-1\in\mathcal{M}$. Donc pour tout $f\in\mathcal{M}$, on a $-f=(-1)\,f\in\mathcal{M}$ comme $\mathcal{M}$ est universellement stable. Par conséquent, pour tout $(f,g)\in\mathcal{M}^2$, $f-g\in\mathcal{M}$.

Définition 14. *Un sous-ensemble $E\subseteq\mathbb{R}^n$ est* mesurable *si 1_E est mesurable.*

Remarque 15. Les sous-ensembles mesurables constituent une tribu.

Remarque 16. Les ouverts $U\subseteq\mathbb{R}^n$ sont mesurables. Les fermés les sont aussi.

Exercice. (Ch1 Ex1.4) Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est mesurable, alors les ensembles $\{f<a\}$, $\{f=a\}$ et $\{f>a\}$ le sont aussi.

Solution. Comme $\{f<a\}=\{f-a<0\}$, et $f\in\mathcal{M}\Leftrightarrow f-a\in\mathcal{M}$, on peut supposer que $a=0$.

$\{f>0\}$ est mesurable. $\{f>0\}=\{\max\{f,0\}>0\}$ et $\max\{f,0\}\in\mathcal{M}$. Donc en remplaçant f par $\max\{f,0\}$, on peut supposer que $f\geq 0$. On prend $g_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x)/(f(x)+1/n)$. Comme $f\in\mathcal{M}$, on a $f+1/n\in\mathcal{M}$. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}^d$: $f(x)+1/n\geq 1/n>0$, alors $g_n\in\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ est stable par division). Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}\ni\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ 0 & f(x)=0\end{cases}=1_{\{f>0\}}$. Par définition, $\{f>0\}$ est mesurable.

$\{f<0\}$ est mesurable. Comme $-f\in\mathcal{M}$, on a $\{f<0\}\Leftrightarrow\{-f>0\}$ est mesurable.

$\{f=0\}$ est mesurable. $\{f=0\}=\mathbb{R}^d\setminus(\{f>0\}\cup\{f<0\})$.

Remarque 17. $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est mesurable, alors pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a l'ensemble $\{a<f<b\}=\{f>a\}\cap\{f<b\}$ est mesurable. Les ensembles $\{a\leq f<b\}=\{f=a\}\cup\{a<f<b\}$, $\{a<f\leq b\}$ et $\{a\leq f\leq b\}$ le sont aussi.

Définition 18. *La* mesure de Lebesgue λ *d'un ensemble mesurable E est $\int 1_E$.*

Remarque 19.

1. $\int 0=0$: $\int 0=\int(0\,0+0\,0)=0\int 0+0\int 0=0$. Par conséquent, $\lambda(\varnothing)=0$.

2. $\lambda([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d])=(b_1-a_1)\,(b_2-a_2)\cdots(b_d-a_d)$ « le volumn ».

3. Soient $E\subseteq F$ deux ensembles mesurables, alors $\lambda(E)\leq\lambda(F)$. En effet, $F\setminus E$ est mesurable, et $1_F=1_E+1_{F\setminus E}$. Donc $\lambda(F)=\lambda(E)+\lambda(F\setminus E)\geq\lambda(E)$. En particulier, si $\lambda(E)=+\infty$, alors $\lambda(F)=+\infty$.

4. Soit $E\subseteq\mathbb{R}^d$ un sous-ensemble. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a un sous-ensemble mesurable $E_n\subseteq E$ t.q. $\lambda(E_n)\geq n$, alors $\lambda(E)=+\infty$. En effet, $\lambda(E)\geq\lambda(E_n)\geq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice. (Ch1 Ex1.5)

1. Soit (A_n) une suite croissante d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$.

2. Trouver une suite (A_n) décroissante d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ t.q. $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)\neq\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)$ [Indication: on peut prendre une suite (A_n) d'ouverts t.q. $\lambda(A_n)=+\infty$ mais $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=\varnothing$].

3. Quand $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)$?

Solution.

1. Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_A$ où $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, (1_{A_n}) est croissante, alors par Beppo-Levi, $\lambda(A) = \int 1_A = \lim_{n\to\infty} \int 1_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$.

2. Quand $d = 1$, on prend $A_n =]n, +\infty[$. Alors $A_n \supseteq [2\,n, k\,n]$ pour tout $k > 2$ et $\lambda([2\,n, k\,n]) = k\,n - 2\,n = (k-2)\,n$. Prenons $k \to \infty$, on a $\lambda(A_n) = +\infty$. Mais $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ [pour d qqlc, similaire].

3. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\lambda(A_n) < +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$. On peut supposer que $n = 0$. On prend $A := A_0$. Alors la suite $(A \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \setminus A_n)$. On remarque que $\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n)) \leq \lambda(A) < +\infty$ et $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n) = A \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, alors $\lambda(A) = \lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) + \lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n)) = \lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} \lambda(A \setminus A_n) = \lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} (\lambda(A) - \lambda(A_n))$. Donc on peut conclure que $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$.

2 Séance 10 fév 2021

Rappelons que la mesure λ de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ satisfait

1. $\lambda(\varnothing) = 0$.
2. $\lambda([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$ pour $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$.
3. Soient E, F deux ensembles mesurables disjoints, alors $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$.
4. **(Beppo-Levi)** Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^d$. Posons $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Alors $\lambda(E) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n)$.

Exemple 20. Déterminer $\lambda([a, b[), \lambda(]a, b])$ et $\lambda(]a, b[)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Solution. Pour $\lambda([a, b[)$, on a $b - a = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) + \lambda(\{b\}) = \lambda([a, b[)$. De la même manière, $\lambda(]a, b]) = b - a$ et $\lambda(]a, b[) = b - a$.

Alternativement, $[a, b[= \bigcup_{n > 1/(b-a), n \in \mathbb{N}} [a, b - 1/n]$, donc $\lambda([a, b[) = \lim_{n \to \infty} \lambda([a, b - 1/n]) = \lim_{n \to \infty} ((b - 1/n) - a) = b - a$.

Exemple 21. Plus généralement, déterminer $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d)$ où $(I_1, \ldots, I_d)$ est une suite d'intervalles en terms de $\lambda(I_j)$. Par exemple, $\lambda([0, 1] \times [0, 1[\times]2, 3] \times]3, 4[)$.

Solution. En effet, $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d) = \lambda(I_1)\, \lambda(I_2) \cdots \lambda(I_d)$. Pour tout intervalle I_j, il existe une suite croissante d'intervalles fermés $\big(I_j^{(n)}\big)_{j \in \mathbb{N}}$ t.q. $\bigcup_{j=0}^{\infty} I_j^{(n)} = I_j$ et $\lim_{n \to \infty} \lambda\big(I_j^{(n)}\big) = \lambda(I_j)$. Dans ce cas, on peut montrer que $\bigcup_{n=0}^{\infty} I_1^{(n)} \times \cdots \times I_d^{(n)} = I_1 \times \cdots \times I_d$.

(« $\subseteq$ » est évident. En revanche, pour tout $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1 \times \cdots \times I_d$, il existe $(r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{N}^d$ t.q. $x_j \in I_j^{(r_d)}$. Alors $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1^{(r_1)} \times \cdots \times I_d^{(r_d)}$)

Alors $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d) = \lim_{n \to \infty} \lambda\big(I_1^{(n)}\big) \cdots \lambda\big(I_d^{(n)}\big) = \lambda(I_1) \cdots \lambda(I_d)$.

En général, λ « volume »:

Subdivision Soient $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert et $N \in \mathbb{N}$. On note $P_N(a_1, \ldots, a_d) := \left[\frac{a_1}{N}, \frac{a_1 + 1}{N}\right[\times \cdots \times \left[\frac{a_d}{N}, \frac{a_d + 1}{N}\right[$ pour $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$. et $Q_N := \{P_N(a_1, \ldots, a_d) \,|\, (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Remarquons que Q est dénombrable (il y a une bijection $\mathbb{Z}^d \to Q_N$). Alors

1. $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{C \in Q_N} C$ (où $\sqcup$ est la réunion disjointe).
2. $\bigsqcup_{C \in Q_N, C \subseteq U} C \subseteq U$.
3. $U \subseteq \bigsqcup_{C \in Q_N, C \cap U \neq \varnothing} C$.

Donc $\lambda(\bigsqcup_{C \in Q_N, C \subseteq U} C) \subseteq \lambda(U) \subseteq \bigsqcup_{C \in Q_N, C \cap U \neq \varnothing} C$, ou équivalemment,

$$\frac{\#\{C \in Q_N \,|\, C \subseteq U\}}{N^d} \leq \lambda(U) \leq \frac{\#\{C \in Q_N \,|\, C \cap U \neq \varnothing\}}{N^d}$$

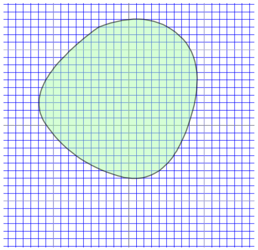
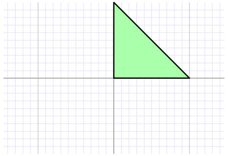


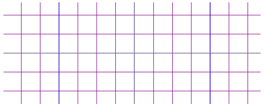
Figure 1. Subdivision de $\mathbb{R}^2$

Exemple 22. Montrer que $\lambda(T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0} \,|\, x+y<1\}) = 1/2$. Plus généralement, on a $\lambda(\{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d_{>0} \,|\, x_1+\cdots+x_d<1\}) = 1/d!$.



Solution. $N\to\infty$, $\#\{C\in Q_N \,|\, C\subseteq T\}$ est un polynôme $N^2/2+\cdots$ de dégré 2, $\#\{C\in Q_N \,|\, C\cap T\neq\varnothing\}$ l'est aussi. $\frac{\#\{C\in Q_N \,|\, C\subseteq T\}}{N^d} \leq \lambda(T) \leq \frac{\#\{C\in Q_N \,|\, C\cap T\neq\varnothing\}}{N^d}$. Prendre $N\to\infty$, on en déduit que $\lambda(T)=1/2$.

Problème 1. (subdivision dyadique) Posons $Q_{(2)} := \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{2^k}$ « les cubes dyadiques »



1. Montrer que pour tout $C, D \in Q_{(2)}$, on a soit $C\subseteq D$, soit $D\subseteq C$, soit $C\cap D=\varnothing$.
2. Considérons l'ensemble $E=\{C\in Q_{(2)} \,|\, C\subseteq U\}$. On dit qu'un objet $C\in E$ est *maximal* s'il n'y a aucun objet $D\in E$ t.q. $D\supsetneq C$. On note $F\subseteq E$ le sous-ensemble des objets maximaux. Montrer que $U=\bigsqcup_{C\in F} C$.
3. Montrer que F est soit fini, soit dénombrable ($Q_{(2)}$ est une réunion d'ensembles dénombrable, donc dénombrable, et $F\subseteq Q_{(2)}$). Donc $\lambda(U)=\sum_{C\in F}\lambda(C)$ (par Beppo-Levi + linéarité).

Remarque 23. $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$: $1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{E_n}$ et on prend $\int_{\mathbb{R}^d}$.

Remarque 24. (Dénombrables)

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ sont dénombrable.
2. Soient E, F ensembles dénombrables, $E\times F$ l'est aussi.
3. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
4. Soient F un ensemble dénombrable et E un ensemble infi. S'il existe une surjection $F \twoheadrightarrow E$, alors E est dénombrable (parce que $F\twoheadrightarrow E$ admet une section $E\hookrightarrow F$ t.q. la composée $E\hookrightarrow F\twoheadrightarrow E$ est une injection, AC).
5. $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable.

Exercice. (Ch1 Ex1.6) Considérons $(\mathbb{R}^d,\lambda)$.

1. Montrer que λ est σ-finie: il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables t.q. $\mathbb{R}^d=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $\lambda(E_n)<+\infty$ [Indication: on peut prendre une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubes fermés].
2. Montrer que $\forall K\subseteq_{\text{cpct}}\mathbb{R}^d$: $\lambda(K)<+\infty$.
3. Un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie est-il forcément borné?
4. Un ouvert dense de $\mathbb{R}^d$ peut-il être de mesure finie?

Solution.

1. $E_n=[-n,n]\times\cdots\times[-n,n]$.

2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $K \subseteq E_n$.

3. Non. $\bigcup_{n=2}^{\infty}]n, n+2^{-n}[$ quand $d=1$. Pour $d>1$, voir la quatrième.

4. Oui. Tout d'abord, $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \twoheadleftarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ est dénombrable): $\mathbb{Q}^d = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Alors on prend $E_n := p_n +]-2^{-n}, 2^{-n}[\times \cdots \times]-2^{-n}, 2^{-n}[$ (il s'agit un cube ouvert dont le centre est p_n et le côté est 2^{1-n}, donc $\lambda(E_n) = (2^{1-n})^d$). Alors comme $\mathbb{Q}^d$ est dense, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq \mathbb{Q}^d$ l'est aussi. $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-n})^d \leq 2$.

Remarque 25. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ et $F \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ deux parties denses, alors $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{d+d'}$ est dense.

Définition 26. *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *une partie. L'*intérieure $\mathrm{Int}(E)$ *est défini par* $\{x \in E \mid \exists r > 0 \colon B_r(x) \subseteq E\}$.

Corollaire 27. $\mathrm{Int}(E)$ *est ouvert.*

Corollaire 28. $\mathrm{Int}(E) = \bigcup_{U \subseteq_{\text{ouvert}} E} U$.

Définition 29. *Une partie* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *est dite* dense *si pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *et tout* $r > 0$, $E \cap B_r(x) \neq \varnothing$.

Corollaire 30. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *est dense ssi* $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^d \setminus E) = \varnothing$.

Exercice. (Ch1 Ex1.7)

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Est-ce vrai sans le mot « dénombrable »?

2. Que vaut la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$?

3. Trouver un ensemble dense $E \subseteq \mathbb{R}^d$ qui est négligeable.

4. Montrer que le complémentaire d'un ensemble négligeable est dense.

5. Montrer que le plan $\{x_3 = 0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Soit (E_n) une suite d'ensembles négligeables, alors $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0$. On ne peut pas enlever le mot « dénombrable »: $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$.

2. $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^d$ alors $\lambda(\mathbb{R}^d) = \lim_{n \to \infty} \lambda([-n, n]^d) = \lim_{n \to \infty} (2n)^d = +\infty$.

3. $E = \mathbb{Q}^d$: un ensemble dénombrable est négligeable.

4. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie négligeable. Il suffit de montrer que $\mathrm{Int}(E) = \varnothing$. On remarque que $\mathrm{Int}(E)$ est ouvert et négligeable. Sinon, il existe un cube (non-vide) $C \subseteq \mathrm{Int}(E)$, alors $\lambda(\mathrm{Int}(E)) \geq \lambda(C) > 0$.

5. En général, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ est négligeable ssi pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $E \cap [-N, N]^d$ est négligeable.

   Ici, $\lambda(\{x_3 = 0\} \cap [-N, N]^3) = \lambda([-N, N]^2 \times \{0\}) = 0$.

Problème 2. Existe-il un ensemble négligeable infini non dénombrable? La réponse c'est oui. Voir les exercices supplémentaires.

Définition 31. (Intégrable) *Une fonction* $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *est dite* intégrable *si* $\int_{\mathbb{R}^d} |f| < +\infty$. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$.

Définition 32. *Soit* $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable. L'*integrale $\int_{\mathbb{R}^d} f$:

Une fonction réelle. $\int_{\mathbb{R}^d} f := \int_{\mathbb{R}^d} f^+ - \int_{\mathbb{R}^d} f^-$ *où les fonctions* $f^+ = \max\{f, 0\}$ *et* $f^- = \max\{-f, 0\}$ *sont intégrables.*

Une fonction complexe. *$\int_{\mathbb{R}^d} f := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}(f)$ où les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables.*

Proposition 33. (Linéarité) *$f, g \in \mathcal{L}^1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}^1$ et $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.*

Proposition 34. (Inégalité triangulaire) *$|\int f| \leq \int |f|$.*

Exercice. (Ch1 Ex1.10, Ex1.11(1)) Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ mesurable. Montrer que

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}_{>0}$, on a $\lambda(\{f > a\}) \leq a^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f$.
2. Si $\int_{\mathbb{R}^d} f < +\infty$, alors f est finie p.p, c'est-à-dire, $\{f = +\infty\}$ est négligeable.
3. Si $\int_{\mathbb{R}^d} f = 0$, alors $f = 0$ p.p.

Solution.

1. $a\, 1_{\{f > a\}} \leq f$ alors $a\, \lambda(\{f > a\}) \leq \int f$.
2. Tout d'abord, $\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\}$ est mesurable. Comme $\int_{\mathbb{R}^d} f < +\infty$, $\lambda(\{f > 1\}) < +\infty$. Alors $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{f > n\}) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f = 0$.
3. $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > 1/n\}$. Comme $\lambda(\{f > 1/n\}) = n \int_{\mathbb{R}^d} f = 0$, on a $\{f > 0\}$ est négligeable.

Exercice. (Ch1 Ex1.12) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer la continuité de l'intégrale: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. pour toute partie mesurable $A \subseteq \mathbb{R}^d$ avec $\lambda(A) < \delta$, on a $\int_A |f| := \int_{\mathbb{R}^d} 1_A\, |f| < \varepsilon$.

Solution. Tout d'abord, si la fonction f est borné, i.e. il existe $M > 0$ t.q. $|f| \leq M$, alors l'énoncé est vrai: on peut prendre $\delta = \varepsilon / M$, alors pour tout A avec $\lambda(A) < \delta$, on a $\int_A |f| \leq M \lambda(A) < \delta M = \varepsilon$.

En général, on a une suite croissante $(1_{\{|f| \leq M\}}\, |f|)_{M \in \mathbb{N}}$ avec $\lim_{M\to\infty} 1_{\{|f| \leq M\}}\, |f| = |f|$. Donc par Beppo-Levi, $\lim_{M\to+\infty} \int 1_{\{|f| \leq M\}}\, |f| = \int |f| < +\infty$, ce qui implique que $\lim_{M\to+\infty} \int (1 - 1_{\{|f| \leq M\}})\, |f| = 0 \Longrightarrow \lim_{M\to+\infty} \int 1_{\{|f| > M\}}\, |f| = 0$. Donc il existe $M \in \mathbb{N}$ t.q. $\int 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon/2$.

On note que $f = 1_{\{|f| > M\}} |f| + 1_{\{|f| \leq M\}} |f|$ où $\int 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon/2$ et la fonction $1_{\{|f| \leq M\}} |f|$ est bornée. Alors par la première paragraphe, il existe $\delta > 0$ t.q. pour tout A avec $\lambda(A) < \delta$, on a $\int_A 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon/2$.

Donc $\int_A |f| = \int_A 1_{\{|f| > M\}} |f| + \int_A 1_{\{|f| \leq M\}} |f| < \varepsilon/2 + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{|f| \leq M\}} |f| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Remarque 35. Quand f est bornée (le cas « bon »), l'énoncé est relativement facile à montrer. Pour le cas général, on décompose f comme une somme de deux fonctions (mesurables) dont l'une est « bonne » et l'autre « partie mauvaise » est majorée.

Une généralisation (dehors de ce cours): lemme de Calderón-Zygmund.

3 Séance 17 fév 2021

Définition 36. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie mesurable. La fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est dite* mesurable *si $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases}$ est mesurable,* intégrable *si $\tilde{f}$ est intégrable, $\int_A f = \int \tilde{f}$.*

Définition 37. *Une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est dite* à densité *s'il existe une fonction positive mesurable $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\mu(A) = \int_A f_\mu$ pour toute partie mesurable $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu := \int_{\mathbb{R}^n} f f_\mu$ est linéaire, .. (les propriétés formelles de l'intégrale de Lebesgue sauf la normlisation)*
Une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est dite de probabilité *si $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.*

Exercice. (Ch1 Ex1.17) On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *convexe* si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\varphi(\lambda\, x + (1 - \lambda)\, y) \leq \lambda\, \varphi(x) + (1 - \lambda)\, \varphi(y)$.

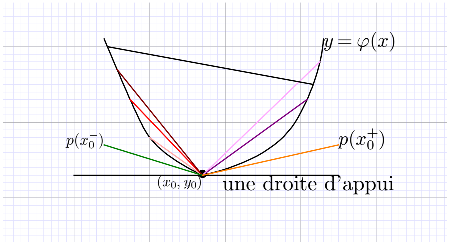
1. Montrer l'existence de *droites d'appui* pour les fonctions convexes: en tout point de leur graphe il existe une droite passant par ce point et ne dépassant jamais le graphe. [Indication: on peut supposer que $\varphi(0) = 0$ et montrer que $\varphi(x) / x \leq \varphi(y) / y$ si $x < 0 < y$]

2. **(Jensen)** Montrer que soit μ une mesure de probabilité à densité, alors $\varphi(\int_{\mathbb{R}^d} g \, \mathrm{d}\mu) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(g) \, \mathrm{d}\mu$ pour tout $g \in L^1(\mu)$ (cf. $\varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1\, \varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n\, \varphi(x_n)$ pour $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0$).

Remarque 38. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la droite $(x, \varphi(x)) \rightsquigarrow (y, \varphi(y))$ contient $(\lambda x + (1 - \lambda)\, y, \lambda\, \varphi(x) + (1 - \lambda)\, \varphi(y))$

Solution.

1. Graphe de fonction convexe:



On fixe $(x_0, y_0 = \varphi(x_0))$ sur le graphe de φ. Alors la fonction $p : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ (pour tout x, $p(x)$ est la pente de la droite $(x, y := \varphi(x)) \rightsquigarrow (x_0, y_0)$) est croissante.

Lemme 39. *La fonction φ est convexe ssi pour tout $x_1 < x_2 < x_3$, on a*

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_2)}{x_3 - x_2}$$

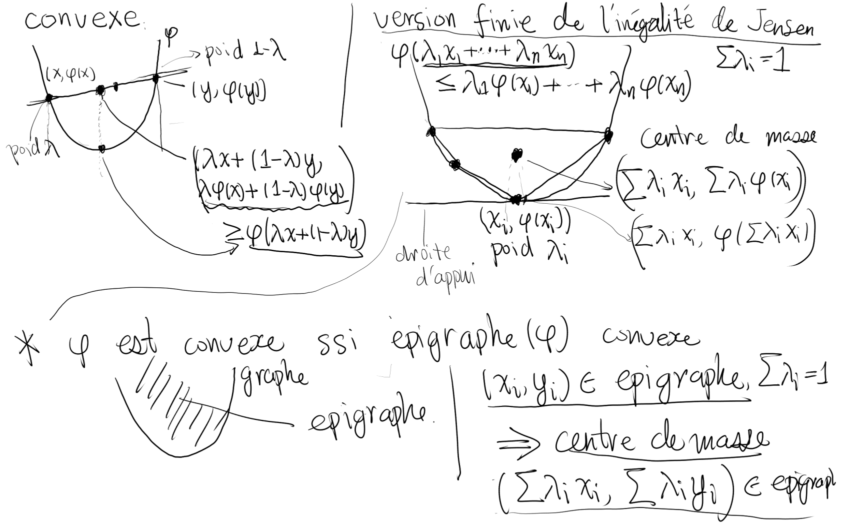
Par conséquent, on a $p(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} p(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} p(x) =: p(x_0^+)$.

Lemme 40. *Une droite passant (x_0, y_0) est une droite d'appui ssi sa pente appartient à l'intervalle $[p(x_0^-), p(x_0^+)]$. Par exemple, si φ est differentiable à x_0, alors telle droite est unique parce que $p(x_0^-) = p(x_0^+) = \varphi'(x_0)$.*

2. On prend $x_0 := \int_{\mathbb{R}^d} g \, \mathrm{d}\mu$ et $y_0 = \varphi(x_0)$. On prend une droite d'appui de φ passant (x_0, y_0) comme le graphe de la fonction $y \mapsto k\,(x - x_0) + y_0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) \geq k\,(x - x_0) + y_0$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(g(x)) \geq k\,(g(x) - x_0) + y_0 = k\, g(x) -$

$k\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu + \varphi(\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu)$. Prenons $\int_A \mathrm{d}\mu$, on a $\int_A \varphi\circ g\,\mathrm{d}\mu \geq k\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu - k\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}^d} 1\,\mathrm{d}\mu + \varphi(\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu)\int_{\mathbb{R}^d} 1\,\mathrm{d}\mu = \varphi(\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu)$ (on a utilisé le fait que $\int_A 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(A) = 1$).

Remarque 41. En général, une partie $E \subseteq \mathbb{R}^d$ est dite *convexe* si pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$. Alors une fonction $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi l'epigraphe $\{(x, y) \mid y \geq f(x)\}$ est convexe.



Définition 42. Sommes de Riemann (particulières) *Soit $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.* $S_N(f) := \sum_{k=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$.

Théorème 43. *Si $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_a^b f = \lim_{N\to\infty} S_N(f) =:^{\text{Riemann}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Théorème 44. (Convergence dominée) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, (f_n) une suite de fonctions mesurables sur A et $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction t.q.*

- *$f_n \to f$ p.p.*
- *Il existe une fonction **intégrable** $g \geq 0$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p.*

Alors f est intégrable, $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Exercice. (Ch1 Ex1.18) Déterminer $\lim_{n\to\infty}$ pour

1. $\sum_{k=0}^{n} n/(n^2+k^2)$.
2. $\sum_{k=n}^{2n} 1/k$.
3. $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n+\pi)$.
4. $(n+1)^{-1}\sum_{k=-n}^{0} (\mathrm{e}^{1/(n+1)})^k$.
5. $\ln n - n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \ln k$.
6. $n^{-1}\prod_{k=1}^{n} (k+n)^{1/n}$.

Remarque 45. Pour résoudre les exercices au-dessus, il faut réécrire les sommes comme une somme de Riemann particulier $S_n(f)$ pour quelque fonction continue f.

$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{N}\right) \sim \sum_{k=0}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{N}\right)$ quand $N \to \infty$.

Solution.

1. $\sum_{k=0}^{n} n/(n^2+k^2) = n^{-1}\sum_{k=0}^{n} n^2/(n^2+k^2) = n^{-1} + n^{-1}\sum_{k=1}^{n} 1/(1+(k/n)^2) = n^{-1} + S_n(f)$ où $f(x) = 1/(1+x^2)$. Donc $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} n/(n^2+k^2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$.

2. $\sum_{k=n}^{2n} 1/k = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(2)$.

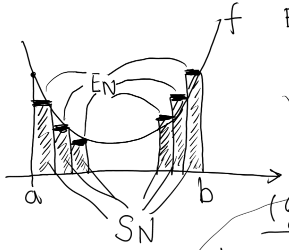
3. $\int_0^1 \sin(\pi\, x + \pi)\, \mathrm{d}x = -\pi^{-1} \int_0^1 \sin(\pi\, x)\, \mathrm{d}(\pi\, x) = -\pi^{-1} \int_0^\pi \sin x\, \mathrm{d}x = \pi^{-1}\,(\cos\pi - \cos 0) = -2\,\pi^{-1}$

4. $(n+1)^{-1}\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{(k-(n+1))/(n+1)} = \mathrm{e}^{-1}\,(n+1)^{-1}\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{k/(n+1)} = \mathrm{e}^{-1} S_{n+1}(f)$ où $f(x) = \mathrm{e}^x$ donc $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{e}^{(k-1)/(n+1)} = \mathrm{e}^{-1}\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}-1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

5. $\ln n - n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \ln k = n^{-1}\,(n\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln k) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\ln n - \ln k) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} -\ln(k/n) = S_n(g)$.

   On prend $g(x) = \begin{cases} -\ln x & x \in]0,1] \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$, alors $1_{[1/n,1]}\, g \to g$ quand $n \to \infty$, donc par Beppo-Levi, $\int_{1/n}^1 g \to \int_0^1 g$. $\int_\varepsilon^1 g = -\int_\varepsilon^1 \ln x\, \mathrm{d}x = -\left(x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\,(\ln x)'\,\mathrm{d}x\right)$ ($x \ln x \to 0$ quand $x \to 0$, i.e. $y^{-1}\ln y \to 0$ quand $y \to +\infty$). Donc $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$.

En suite, $S_N(g) = \int_a^b E_N(g)$ où $E_N(g) := \sum_{k=1}^{N} 1_{[a+(b-a)(k-1)/N,\, a+(b-a)k/N]}\, g(a + k\,(b-a)/N)$.



$E_N := \sum_{k=1}^{N} 1_{\left[a+\frac{k-1}{N}(b-a),\, a+\frac{k}{N}(b-a)\right]} \cdot f\left(a+\frac{k-1}{N}(b-a)\right)$

En particulier, si $g \searrow$ continue sur $]a,b]$

$(g(x) = -\ln x,\ x \in]0,1])$

Alors $E_N(g) \leq g$ $g \in \mathcal{L}^1(]0,1])$

$\left.\begin{array}{l} E_N \to g \\ 0 \leq E_N \leq g \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b E_n \to \int_a g$

Lemme 46. *Soit $g :]a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue décroissante. Si g est intégrable sur $]a,b]$, alors les sommes de Riemann particulières $\lim_{N\to\infty} S_N = \int_a^b g$.*

$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \ln x\, \mathrm{d}x = 1$.

6. $\ln(n^{-1}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}) = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} n^{-1}\ln(k+n) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+n) - \ln n) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+k/n)$. On prend $f(x) = \ln(1+x) \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Donc $\lim_{n\to\infty}\ln(\cdots) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$. Par la continuïté de exp, on a $\lim_{n\to\infty}(\cdots) = \exp(\ln 2) = 2$.

Exercice. (Ch1 Ex1.13) Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $\theta\in[a,b]$ t.q. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(\theta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution. On prend $m:=\inf\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ et $M:=\sup\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$. Comme f est continue, pour tout $\alpha\in[m,M]$, il existe $\theta\in[a,b]$ t.q. $f(\theta)=\alpha$. Donc il suffit de montrer que $m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (quand $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, alors cela implique que $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=0$. Quand $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$, alors $\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\int_a^b f(x)\,g(x)\in[m,M]$).

En effet, $m\leq f(x)\leq M$ et $g(x)\geq 0\Longrightarrow m\,g(x)\leq f(x)\,g(x)\leq M\,g(x)$, cela implique ce que nous devons montrer.

Exercice. (Ch1 Ex1.15) Soit $f\in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0})$ une fonction continue intégrable.

1. **(Traité dans le CM?)** Construire une fonction continue $f\in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0})$ intégrable t.q. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ n'existe pas.

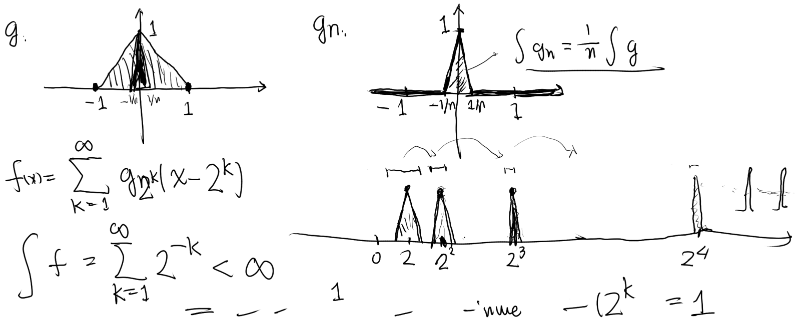
2. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Solution.

1. Tout d'abord, il existe une fonction continue $g:[-1,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. $g(-1)=g(1)=0$, $g(1)=1$ mais $\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x>0$ (on peut prendre $g(x):=1-|x|$).

   En suite, $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $g_n(x)=\begin{cases} g(n\,x) & x\in[-1/n,1/n]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est continue, $g_n(-1/n)=g_n(1/n)=0$ et $\int_{\mathbb{R}}g_n=\int_{-1/n}^{1/n}g_n(x)\,\mathrm{d}x=n^{-1}\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Alors, on peut prendre $f(x)=\sum_{k=1}^\infty g_{2^k}(x-2^k)$ est continue, $\int f=\left(\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\right)\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ donc $f\in\mathcal{L}^1$ mais $f(2^k)=1$ et $f(2^k+1)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}_{>1}$. Donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ n'existe pas.



2. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ssi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $E>0$ t.q. pour tout $x>E$ on a $f(x)<\varepsilon$. Sinon, il existe $\varepsilon>0$, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante t.q. $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$ et $f(x_n)\geq\varepsilon$. On va trouver une contradiction. Tout d'abord, on peut supposer que $x_{n+1}-x_n>1$.

   Pour cela, par la continuïté uniforme, il existe $\delta>0$ t.q. pour tout $|x-y|\leq\delta$, on a $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. On peut supposer que $\delta<1/2$. En particulier, pour tout $y\in[x_n-\delta,x_n+\delta]$, on a $f(y)\geq f(x_n)-\varepsilon/2\geq\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2$. Alors $\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\geq 2\,\delta\,\varepsilon/2=\varepsilon\,\delta$. On remarque que $([x_n-\delta,x_n+\delta])_{n=1}^\infty$ sont deux-à-deux disjoints, $\int_{\mathbb{R}}f\geq\sum_{n=1}^\infty\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\geq\sum_{n=1}^\infty\varepsilon\,\delta=+\infty$. C'est une contradiction ($f\in\mathcal{L}^1$).

Exercice. (Ch1 Ex1.19) Montrer que si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est K-lipschitzienne, alors $\left|S_N(f)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq K\,(b-a)^2/(2\,N)$.

Solution. On commence par $N=1$. Comme f est K-lipschitzienne, pour tout $x\in[a,b]$, on a $|f(x)-f(a)|\leq K\,(x-a)$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|S_1(f)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|(b-a)\,f(a)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\int_a^b (f(a)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq^{\text{tri}} \int_a^b |f(a)-f(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_a^b K\,(x-a)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{K\,(b-a)^2}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

En général, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^N \int_{a+(b-a)(k-1)/N}^{a+(b-a)k/N} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\left|S_N(f)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^N f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)-\sum_{k=1}^N \int_{a+(b-a)(k-1)/N}^{a+(b-a)k/N} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\sum_{k=1}^N \left(\frac{b-a}{N}f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)-\int_{a+(b-a)(k-1)/N}^{a+(b-a)k/N} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right|\\
&\leq^{\text{tri}} \sum_{k=1}^N \left|\frac{b-a}{N}f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)-\int_{a+(b-a)(k-1)/N}^{a+(b-a)k/N} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq^{(1)} \sum_{k=1}^N \frac{K\left(\frac{b-a}{N}\right)^2}{2}\\
&= \frac{K\,(b-a)^2}{2}
\end{aligned}$$

Exercices non-traités

Exercice. (Ch1 Ex1.20) On note $\mathcal{E}([a,b[)$ l'ensemble des fonctions en escalier.

1. Montrer que $\mathcal{E}([a,b[)$ est un espace vectoriel dont $(1_{[\alpha,\beta[})_{a\leq\alpha<\beta\leq b}$ est une famille génératrice non libre.
2. Montrer que $(1_{[a,\beta[})_{a\leq\beta\leq b}$ est une base de $\mathcal{E}([a,b[)$.
3. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $L\in\mathcal{E}([a,b[)^*$ t.q. $L(1_{[\beta,\alpha[})=\beta-\alpha$.
4. Montrer que pour tout élément $g\in\mathcal{E}([a,b[)$, on a $|L(g)|\leq(b-a)\sup_{[a,b]}|g|$.
5. Soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ une fonction bornée pour laquelle il existe $(g_n)\in\mathcal{E}([a,b[)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sup_{[a,b[}|f-g_n|=0$. Montrer que $(L(g_n))$ converge. Si $(h_n)\in\mathcal{E}([a,b[)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sup_{[a,b[}|f-h_n|=0$, montrer que $\lim_{n\to\infty}L(g_n)=\lim_{n\to\infty}L(h_n)$.

Exercice. (Ch1 Ex1.16)

Définition 47. $f_n \to f$ (mes) *si pour tout* $\varepsilon > 0$, $\lambda(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) \to 0$.

1. Convergence p.p $\Rightarrow$ Convergence en mes
   a. $(A_k \subseteq [0,1])$ mesurables décroissante. $\lambda(\bigcap A_k)$?
   b. $(B_j \subseteq [0, 1])$ mesurables t.q. $\inf_j \lambda(B_j) > 0$. Montrer que $\lambda(\bigcap_k \bigcup_{j \geq k} B_j) \neq 0$.
   c. Conclure.
2. Montrer que $1_{[0,1]}, 1_{[0.1/2]}, 1_{[1/2,1]}, 1_{[0,1/4]}, 1_{[1/4,1/2]}, 1_{[1/2,3/4]}, 1_{[3/4,1]}, 1_{[0,1/8]}, \ldots$ converge en mes. p.p?
3. Soit $f_n \to f$ (mes).
   a. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) t.q. pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$, $\lambda(E_k := \{|f - f_{n_k}| > 1/k\}) \leq 2^{-k}$.
   b. $H_m := \bigcup_{k \geq m+1} E_k$. Montrer que $\lambda(H_m) \leq 2^{-m}$.
   c. $\lambda(\bigcap H_m)$?
   d. $f_{n_k} \to f$ p.p.
4. $\Omega \subseteq_{\text{mesurable}} \mathbb{R}^d$ au lieu de $[0, 1]$.

4 Séance 3 mar 2021

Théorème 48. (Thm fond de l'analyse)

Corollaire 49. *Si $f \in C^1$, alors* $\int_a^b f'$

Théorème 50. *Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors (Leb)$\int_a^b f =$ (Rie)$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Lemme 51. (Changement de var) *Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, alors*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

et

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 52. Formellement, on écrit $\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$.

Exercice. (Ch2 Ex1.1) Calculs de primitives

1. $x \mapsto 3\,x^2 + x + 2$, $x \mapsto \sin(2\,x)$, $x \mapsto 1/(x^2+1)$, $f(x) = 1/(x^2+2)$
2. $x \mapsto x/(x^2+1)$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \tan(2\,x)$
3. $x \mapsto \frac{2\,x}{(x^2+1)^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$, $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto \cos^2 x$

Solution.

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan|x| + C$, $\int (3\,x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x = x^3 + \frac{x^2}{2} + 2\,x + C$, $\int \sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2\,x)\,\mathrm{d}(2\,x) = -\frac{1}{2}\cos(2\,x) + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x/\sqrt{2})}{(x/\sqrt{2})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
2. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$, $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

   $\int \tan(2\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2\,x)| + C$
3. $\int \frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+1)^2}$, $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -(t+1)^{-1} + C$ donc $\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+1)^2} = -(x^2+1)^{-1} + C$.

   $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2\,x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\,x) + C$.
   $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2\,x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\,x) + C$

   Pour évaluer $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}}$, tout d'abord, $2 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. On peut prendre $x = \sqrt{2}\sin\theta$ où $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin\theta)}{\sqrt{2\,(1-\sin^2\theta)}} = \int \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \theta + C = \arcsin(x/\sqrt{2}) + C$. $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$, donc il y a une relation entre $\arcsin x$ et $\arccos x$.

Remarque 53. Calculer les primitives pour

1. **(Polynôme)** $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ par linéairité $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
2. **(Fonction rationnelles)** $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

   a. $\deg Q = 1$: tout d'abord, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C$. En général, e.g. $Q(x) = x - a$. $P(x) = (x-a)\,R(x) + P(a)$ où $R(x) \in \mathbb{R}[X]$, Alors

$\int \frac{P(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x = \int R(x)\,\mathrm{d}x + P(a)\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$

b. $\deg Q = 2$, e.g. $Q(x) = x^2 + a\,x + b$. $\Delta = a^2 - 4\,b$

i. $\Delta > 0$, $Q(x) = (x-\alpha)\,(x-\beta)$ où α, β sont deux racines de Q. Alors

$$\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{(x-\alpha)\,(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{x-\alpha} - \int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{x-\beta}\right)$$

ii. $\Delta = 0$, e.g. $Q(x) = (x-\alpha)^2$, $\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2} \xlongequal[t=x-\alpha]{x=t+\alpha} \int \frac{P(t+\alpha)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. $P(t+\alpha) \in \mathbb{R}[t]$: $P(t+\alpha) = R(t)\,t^2 + c\,t + d$ où $c, d \in \mathbb{R}$. Donc $\int \frac{P(t+\alpha)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int R(t)\,\mathrm{d}t + c\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + d\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, comme $\int \mathrm{d}t/t = \ln|x-\alpha| + C$ et $\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -(x-\alpha)^{-1} + C$.

iii. $\Delta < 0$. e.g. $Q(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$. $\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \xlongequal{x=t+\alpha} \int \frac{P(t+\alpha)}{t^2+\beta^2}\,\mathrm{d}t$. $P(t+\alpha) = (t^2+\beta^2)\,R(t) + c\,t + d$. Alors $\int \frac{P(t+\alpha)}{t^2+\beta^2}\,\mathrm{d}t = \int R(t)\,\mathrm{d}t + c\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+\beta^2} + d\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\beta^2}$ où

$$\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+\beta^2} = \int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{t^2+\beta^2} = \ln(t^2+\beta^2) + C$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{\mathrm{d}(t/\beta)}{(t/\beta)^2+1} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{t}{\beta}\right) + C$$

c. Quand $\deg Q > 2$, on commence par factoriser Q.

Exercice. (Ch2 Ex1.4) Calculer

1. $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$
2. $\int_0^1 \frac{x^2+2\,x+2}{x^2+3\,x+2}\,\mathrm{d}x$.

Solution.

1. $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\,(x+1)} = \int_2^3 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\Big|_2^3$
2. $\int_0^1 \frac{x^2+2\,x+2}{x^2+3\,x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+2\,x+2}{(x+1)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+2\,x+2)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left((x+1) + \frac{1}{x+1} - x - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 1 + \ln(2) - 2\ln(3) + 2\ln(2) = 1 + 3\ln(2) - 2\ln(3)$.

Remarque 54. Primitives

1. $\int \mathrm{e}^x\,P(x)\,\mathrm{d}x$ où $P \in \mathbb{R}[X]$. Tout d'abord, $\deg P = 0$. On suppose que $\deg P > 0$.

$$\int \mathrm{e}^x\,P(x)\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = P(x)\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,P'(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\deg P' = \deg P - 1$. Alors on peut continuer.

2. $\int P(x)\ln x\,\mathrm{d}x$ où $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $\int P(x)\,\mathrm{d}x = x\,Q(x) + C$. Alors

$$\int P(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}(Q(x)) = x\,Q(x)\ln x - \int Q(x)\,\mathrm{d}x$$

3. $\int P(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ et $\int P(x)\cos x\,\mathrm{d}x$. $\int P(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}(\sin x) = P(x)\sin x - \int P'(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ où $\deg P' < \deg P$.

Exercice. (Ch2 Ex1.5) Calculer IPP

$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\int_0^{2\pi} x\ \sin\ x\ \ \mathrm{d}x$ (non-traité) $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$ $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

Solution.

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$
2. $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = 1$
3. $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\ln(x)|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x\right) = \cdots = \frac{1+\mathrm{e}^2}{4}$
4. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\,x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \ln 2 - 2 + \pi/2$ où $\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x\,\frac{1-\cos(2\,x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{2} - \int_0^{4\pi}\frac{u/2\cos(u)}{2}\,\mathrm{d}(u/2) = \pi^2$.

Remarque 55. Le primitive de $\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(x)$ n'est pas nécessairement élémentaire. Par exemple, $\int \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Remarque 56. $\int P(x, \sqrt{x-a})\,\mathrm{d}x$ où P est une fonction rationnelle. On remplace $u = \sqrt{x-a}$, alors $x = u^2 + a$

$$\int P(x, \sqrt{x-a})\,\mathrm{d}x = 2\int u\,P(u^2-a, u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 57. $\int P(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$. On peut remplacer $t = \tan(x/2)$, alors $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. On peut simplifier le calculs quand

1. $P = Q(\cos^2 x, \sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$, alors $\int P(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int Q(1-\sin^2 x, \sin^2 x)\,\mathrm{d}(\sin x)$.
2. $P = Q(\cos^2 x, \sin^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x$ (similaire)

Exercice. (Ch2 Ex1.6) Calculer

$\int_0^{\pi/2}\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x$ $\int_0^1 \frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$ $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3+\sin^2 t}$ $\int_8^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t}}$ $\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$

Solution.

1. $u = 2\,x$
2. $u = x^2$
3. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 1$
4. $\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\cos t)$ et $\sin^2 t = 1 - \cos t$, on prend $u = \cos t$
5. $\int_8^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t}}$ On prend $x = \sqrt{1+t}$, alors $t = x^2 - 1$. On a $\int_8^3 \frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)\,x} = \int_8^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2$.
6. $\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{2/(u^2+1)\,\mathrm{d}u}{(3+2\,(1-u^2)/(1+u^2))} = \int_0^1 \frac{2}{5+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\,\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}}\Big|_0^1$

Remarque 58. En pratique, pour les fonctions « bonnes » (par exemple, « quasiment » continue) pour déterminer si $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, il suffit de déterminer si l'intégrale impropre $\int |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge (c'est-à-dire, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument). Donc les procédures s'appliquent:

1. Trouver toutes les singularités.

   a. $a\in\mathbb{R}$ est une singularité si f n'est pas bornée auprès de a. Donc quand f est continue au point a, alors a **n'est pas** une singularité.

   b. $a=+\infty$ n'est pas une singuliarité s'il existe M t.q. pour tout $x>M$, on a $f(x)=0$.

   c. $a=-\infty$ similaire.

2. Déterminer la convergence de toutes les singularités:

   a. Comparaison. Par exemple, si $a\in\mathbb{R}$ est le seul singulier. Soit g une fonction (continue dans $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ et $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$ existe, alors $g\in\mathcal{L}^1\Rightarrow f\in\mathcal{L}^1$. En effet, si $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$ existe, alors il existe M t.q. $|f(x)|\le M\,|g(x)|$ sur $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. En pratique, on peut souvent trouver une équivalence de f quand $x\to a$. En effet, $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}|f|\le M\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}|g|<+\infty$, donc f est intégrable sur $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. C'est similiaire quand $a=+\infty$ en remplaçant $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ par $[A,+\infty[$. Similaire pour $a=-\infty$.

      En particulier, si $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors $f\in\mathcal{L}^1$ ssi $g\in\mathcal{L}^1$.

Exercice. (Ch2 Ex1.2) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$?

$t\mapsto\sin t\quad t\mapsto 1_{[0,1]}(t)\ln t\quad t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\quad t\sin(t)\mathrm{e}^{-t}1_{[0,+\infty[}(t)\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}1_{[0,+\infty[}(t)$
$t\mapsto(1-t)^{-1}t^{-1/2}1_{[0,1]}(t)\quad t\mapsto\ln(t)/(1+t^2)1_{[0,+\infty]}(t)$

Solution.

1. $\sin t$ Deux singularités: $\pm\infty$, $\int|\sin t|\,\mathrm{d}t=+\infty$ donc $(t\mapsto\sin t)\notin\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2. e^{-t} Deux singularités: $\pm\infty$, $\int_{-M}^0|\mathrm{e}^{-t}|\,\mathrm{d}t\ge\int_{-M}^0\mathrm{d}t=M$ donc $\int|\mathrm{e}^{-t}|\,\mathrm{d}t=+\infty$.

3. $1_{[0,1]}(t)\ln t$ Singularité $\{0\}$ sur $[0,1]$. $\int_\varepsilon^1|\ln t|\,\mathrm{d}t=-\int_\varepsilon^1\ln t\,\mathrm{d}t=1-\varepsilon+\varepsilon\ln(\varepsilon)$. Donc $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1|\ln t|=1$ donc $1_{[0,1]}\ln(\cdot)\in\mathcal{L}^1$.

4. $t\,\sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,1_{[0,+\infty[}(t)$. Singularité: $+\infty$. Intégrable. Par exemple $\lim_{t\to\infty}\frac{t\sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t/2}}=0$ et $\mathrm{e}^{-t/2}1_{[0,+\infty[}\in\mathcal{L}^1$.

5. $\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}1_{[0,+\infty[}(t)$: Singularités: $\{0,+\infty\}$. Quand $t\to0^+$, $\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\sim\ln(t)\in\mathcal{L}^1([0,1])$. Quand $t\to+\infty$, $\lim_{t\to+\infty}\ln(t)\,e^{-t}/e^{-t/2}=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t/2}=0$ et $\mathrm{e}^{-t/2}\in\mathcal{L}^1([1,+\infty])$, donc intégrable.

6. $(1-t)^{-1}\,t^{-1/2}\,1_{[0,1]}(t)$: Singularités: $\{0,1\}$. Quand $t\to0^+$, $(1-t)^{-1}\,t^{-1/2}\sim t^{-1/2}$ est intégrable sur $]0,1/2]$. Quand $t\to1^-$, $(1-t)^{-1}\,t^{-1/2}\sim(1-t)^{-1}$ n'est pas intégrable sur $[1/2,1]$, donc $(1-t)^{-1}t^{-1/2}1_{[0,1]}(t)\notin\mathcal{L}^1$.

7. $\ln(t)/(1+t^2)\,1_{[0,+\infty]}(t)$. Singularités: $\{0,+\infty\}$. Quand $t\to0^+$, $\ln(t)/(1+t^2)\sim\ln(t)$ est intégrable sur $[0,1]$. Quand $t\to+\infty$, $\ln(t)/(1+t^2)\sim t^{-2}\ln(t)$, et $\lim_{t\to+\infty}(t^{-2}\ln(t))/(t^{-3/2})=0$ et $t^{-3/2}\in\mathcal{L}^1$. En résumé, $(t\mapsto\ln(t)/(1+t^2)\,1_{[0,+\infty]}(t))\in\mathcal{L}^1$.

5 Séance 10 mars 2021

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(]0,1[)$ croissante. Montrer que $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_0^1 f$ où $S_n(f) := n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} f(k/n)$ [Indication: $\int_{x-1/n}^{x} f \leq f(x)/n \leq \int_x^{x+1/n} f$].

Solution. $\int_{[0,1]\setminus[1-1/n,1]} f \leq S_n(f) \leq \int_{[0,1]\setminus[0,1/n]} f$. Comme $\lambda([1-1/n,1]) = \lambda([1-1/n,1]) = 1/n \to 0$ quand $n \to 0$ et $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_{[1-1/n,1]} f = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1/n]} f$. Donc $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_0^1 f$.

Exercice 2. Déterminer

1. $\int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$

Solution.

1. Changement de variable: $t = \tan x$ alors $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x} &= \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(2t+3)(1+t^2)} \\
\frac{t}{(2t+3)(1+t^2)} &= \frac{A}{2t+3} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \\
\frac{t}{1+t^2} &= A + \frac{(Bt+C)(2t+3)}{1+t^2}
\end{aligned}$$

on prend $t = -3/2$, on a $A = (-3/2)/(1+9/4) = -6/13$.

$$\begin{aligned}
\frac{t}{(2t+3)(1+t^2)} + \frac{6}{13(2t+3)} &= \frac{13t + 6(1+t^2)}{13(2t+3)(1+t^2)} \\
&= \frac{(2t+3)(3t+2)}{13(2t+3)(1+t^2)} \\
&= \frac{3t+2}{13(1+t^2)} \\
\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(2t+3)(1+t^2)} &= -\frac{6}{13}\int \frac{\mathrm{d}t}{2t+3} + \frac{1}{13}\int \frac{3t+2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
\int \frac{3t+2}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int \frac{3\,\mathrm{d}(t^2)}{2(1+t^2)} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Alternativement, on prend $I := \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$ et $J := \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$, alors $2I + 3J = \int \mathrm{d}x = x + C$, et

$$\begin{aligned}
2J - 3I &= \int \frac{(2\cos x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(2\sin x + 3\cos x)}{2\sin x + 3\cos x} \\
&= \ln|2\sin x + 3\cos x| + C'
\end{aligned}$$

On peut résoudre le système $2I + 3J = x + C, 2J - 3I = \ln|\cdot| + C'$.

Remarque 59. On peut évaluer $\int \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x}{\gamma\sin x + \delta\cos x}\mathrm{d}x$ par cette méthode.

2. On peut factoriser $1+x^4=(1+x^2)^2-(\sqrt{2}\,x)^2=(1-\sqrt{2}\,x+x^2)\,(1+\sqrt{2}\,x+x^2)$ et écrire

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{A\,x+B}{1-\sqrt{2}\,x+x^2}+\frac{C\,x+D}{1+\sqrt{2}\,x+x^2}$$

Trouver $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ et calculer la primitive.

Alternativement, $I:=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ et $J:=\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$. Alors

$$\begin{aligned}
I+J &= \int\frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}x}{1+x^4}\\
&= \int\frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}}\,\mathrm{d}x \quad x\neq 0\\
&= \int\frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}+C\\
-I+J &= \int\frac{(-1+x^2)\,\mathrm{d}x}{1+x^4}\\
&= \int\frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}}\,\mathrm{d}x \quad x\neq 0\\
&= \int\frac{\mathrm{d}(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2-2}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+C'
\end{aligned}$$

Exercice 3. Posons $I_n:=\int\frac{\sin n\,x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ pour $n>2$. Montrer que

$$I_n=\frac{2\sin\,(n-1)\,x}{n-1}+I_{n-2}$$

[Indication: $\sin n\,x=\sin(x+(n-1)\,x)=\sin x\cos((n-1)\,x)+\cos x\sin((n-1)\,x)$ et $\sin((n-2)\,x)=\sin((n-1)\,x-x)=\sin((n-1)\,x)\cos x-\cos((n-1)\,x)\sin x$].

Solution. On a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\frac{\sin((n-1)\,x)\cos x+\cos((n-1)\,x)\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{\sin((n-1)\,x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int\cos((n-1)\,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\sin((n-1)\,x)}{n-1}+\int\frac{\sin((n-1)\,x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
I_{n-2} &= \int\frac{\sin((n-1)\,x)\cos x-\cos((n-1)\,x)\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\sin((n-1)\,x)}{n-1}+\int\frac{\sin((n-1)\,x)\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Donc $I_n-I_{n-2}=2\sin((n-1)\,x)/(n-1)$.

Exercice 4. Posons $I_{m,n}:=\int\cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$. Montrer (par IPP) que

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$$

Solution. On a

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int \cos^{m-1} x \sin^n x \, \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x - \int \sin x \, \mathrm{d}(\cos^{m-1} x \sin^n x) \\
(\cos^{m-1} x \sin^n x)' &= (m-1) \cos^{m-2} x \, (-\sin x) \sin^n x + \cos^{m-1} x \, n \sin^{n-1} x \cos x \\
&= -(m-1) \cos^{m-2} x \sin^{n+1} x + n \cos^m x \sin^{n-1} x \\
I_{m,n} &= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n+2} - n I_{m,n} \\
I_{m-2,n+2} &= \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= I_{m-2,n} - I_{m,n} \\
I_{m,n} &= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) (I_{m-2,n} - I_{m,n}) - n I_{m,n} \\
&= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n} - (m+n-1) I_{m,n} \\
(m+n) I_{m,n} &= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}
\end{aligned}
$$

Exercice 5. Déterminer $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x$

Solution. On peut utiliser IPP pour établir une relation de récurrence. Alternativement,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x &= \int (\sin^2 x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1 - \cos(4x)}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C
\end{aligned}
$$

Remarque 60. Soit $P \in \mathbb{R}[X, Y]$, alors $\int P(\cos^2 x, \sin^2 x) \, \mathrm{d}x = \int P\left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}, \frac{1 - \sin(2x)}{2} \right)$.

Définition 61. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est* localement intégrable au point $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *s'il existe un voisinage $V \ni a$ t.q. $f \in \mathcal{L}^1(V)$.*

Définition 62. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction « bonne » (dont l'ensemble de discontinuités est discret). On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une* singularité *si pour tout voisinage $V \ni a$, f est non-bornée sur V. Pour $a = \pm\infty$, a est une* singularité *sauf si $f = 0$ sur un voisinage $V \ni a$.*

Remarque 63. Si f est continue au point $a \in \mathbb{R}$, alors a n'est pas une singularité.

Lemme 64. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction « bonne ». Si $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ n'est pas une singularité, alors f est localement intégrable au point a.*

Lemme 65. *Une fonction « bonne » $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable **ssi** f est localement intégrable à toute singularité $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Determiner si une fonction « bonne » $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est intégrable:

1. Trouver toutes les singularités (potentielles).
2. Pour toute singularité $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, déterminer si f est localement intégrable au point a, par une combinaison des méthodes suivantes:
   a. On peut remplacer f par une fonction g équivalente « plus simple » quand $x\to a$.
   b. On peut majorer (ou minorer) f par une fonction g localement intégrable (ou non-intégrable) au point a.
   c. On peut évaluer $\int_V f$ sur un voisinage $V\ni a$.

Remarque 66. Quand une fonction n'est définie que sur un sous-ensemble $E\subseteq\mathbb{R}$, i.e., $f:E\to\mathbb{R}$, il suffit de considérer $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x)=f(x)$ quand $x\in E$ et $\tilde{f}(x)=0$ quand $x\in\mathbb{R}\setminus E$.

Lemme 67. (Riemann) $t\mapsto t^\alpha$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *ssi* $\alpha<-1$.

Démonstration. Singularité: $\{+\infty\}$. Quand $\alpha<-1$, $\int_a^{+\infty}|t^\alpha|\,\mathrm{d}t=\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^{+\infty}=-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc intégrable. Quand $\alpha\geq-1$, $\int_a^{+\infty}|t^\alpha|\,\mathrm{d}t\geq\int_a^{+\infty}t^{-1}\,\mathrm{d}t=+\infty$, donc pas intégrable. □

Remarque 68. On la compare avec la convergence de la suite $\sum n^\alpha$.

Exercice. (Ch2 Ex1.2(8)) Déterminer si $t\mapsto\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}1_{[1,+\infty[}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque 69. Quand $t\to+\infty$, $(\ln\ln t)^{100}\ll\cdots\ll\ln t\ll(\ln t)^2\ll(\ln t)^3\ll\cdots\ll t\ll t^2\ll\cdots\ll\mathrm{e}^t\ll\cdots$

Solution. Singularité $\{+\infty\}$. $t\to+\infty$, $t\mapsto\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}$ - pas de simplification évidente. $\sqrt{\ln t}\lesssim\ln t$ quand $t\to+\infty$, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\geq\mathrm{e}^{-\ln t}=t^{-1}$. On va déterminer si $t\mapsto t^{-1}$ est localement intégrable au point $+\infty$. Pour tout $a\in\mathbb{R}_{>1}$, $\int_a^{+\infty}t^{-1}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A t^{-1}=\lim_{A\to\infty}\ln(A/a)=+\infty$. Donc $\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t\geq\int_a^{+\infty}t^{-1}\,\mathrm{d}t=+\infty$, donc pas intégrable.

Exercice 6. Trouver une CNS sur $p>0$ t.q. la fonction $f(x)=\frac{\sin x}{x^p+\sin x}$ appartienne à $\mathcal{L}^1([0,+\infty])$.

Solution. Tout d'abord, f est continue sur $]0,+\infty[$, donc les singularités « potentielles » sont $\{0,+\infty\}$.

0. $0\lesssim\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\lesssim1$ quand $x\to0^+$, donc f est localement bornée au point 0. Donc 0 n'est pas une singularité.

$+\infty$. Comme $p>0$, $x^p+\sin x\sim x^p$ donc $\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\sim\frac{\sin x}{x^p}$ quand $x\to+\infty$.

Quand $p>1$, $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leq x^{-p}$ et $x\mapsto x^{-p}$ est localement intégrable au point $+\infty$ (par la critère de Riemann). Donc f est localement intégrable au point $+\infty$. Quand $p\leq1$, f n'est pas localement intégrable au point $+\infty$. Il y a deux méthodes:

1. $\sin x\geq1/\sqrt{2}$ quand $2k\pi+\pi/4\leq x\leq2k\pi+3\pi/4$ où $k\in\mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x &\geq \int_{\bigcup_{k=k_0}^{\infty}[2k\pi+\pi/4,2k\pi+3\pi/4]}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\bigcup_{k=k_0}^{\infty}[2k\pi+\pi/4,2k\pi+3\pi/4]}x^{-p}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}x^{-p}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda([2\,k\,\pi+\pi/4, 2\,k\,\pi+3\,\pi/4])\,(2\,k\,\pi+3\,\pi/4)^{-p} \\
&= C\sum_{k=k_0}^{\infty} (2\,k\,\pi+3\,\pi/4)^{-p} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

où k_0 est le minimum k t.q. $2\,k\,\pi \geq A$ (La dernière étape: $2\,k\pi+3\,\pi/4 \sim 2\,k\,\pi$ quand $k\to\infty$ et on utilise la critère de Riemann pour les suites).

2. On peut souvent calculer le DL de $\int_a^A f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ par IPP.

Exercice. (Ch2 Ex1.3) Pour $\alpha,\beta>0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(t)=t^{-\alpha}\,|\ln t|^{-\beta}$. Montrer que

1. $f_{\alpha,\beta}\in\mathcal{L}^1(]0,\mathrm{e}^{-1}[)$ ssi $\alpha<1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1)$.
2. $f_{\alpha,\beta}\in\mathcal{L}^1([\mathrm{e},+\infty[)$ ssi $\alpha>1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1)$.

Solution. On va traiter seulement pour $[\mathrm{e},+\infty[$. Les singularités: $\{+\infty\}$. Quand $\alpha>1$, on prend un réel $\gamma\in]1,\alpha[$. Alors quand $t\to\infty$, $t^{-\alpha}\,|\ln t|^{-\beta}\ll t^{-\gamma}$ et $t\mapsto t^{-\gamma}$ est localement intégrable au point $+\infty$. Donc $f_{\alpha,\beta}$ l'est aussi. Quand $\alpha<1$, on prend un réel $\gamma\in]\alpha,1[$. Quand $t\to\infty$, $t^{-\alpha}\,|\ln t|^{-\beta}\gg t^{-\gamma}$ et $t\mapsto t^{-\gamma}$ n'est pas localement intégrable au point $+\infty$. Donc $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas localement intégrable non plus.

Maintenant on suppose que $\alpha=1$. On change $s=\ln t$, alors $\mathrm{d}t=t\,\mathrm{d}s$, donc pour $b>a>\mathrm{e}$

$$\int_a^b t^{-1}\,|\ln t|^{-\beta}\,\mathrm{d}t=\int_{\ln a}^{\ln b} s^{-\beta}\,\mathrm{d}s$$

Par critère de Riemann, $s\mapsto s^{-\beta}$ est localement intégrable au point $\{+\infty\}$ ssi $\beta>1$, donc $t\mapsto t^{-1}\,|\ln t|^{-\beta}$ est localement intégrable ssi $\beta>1$.

Problème 3. DL de $\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $a\to+\infty$.

Méthode générale:

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_a^{+\infty}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})\,f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{IPP}}{=\!=} -\mathrm{e}^{-t}\,f(t)|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}\right)\Bigg|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

6 Séance 17 mars 2021

3 thèmes importants:

1. Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n$ en réécrivant S_n comme une somme de Riemann.
2. Calculer la primitive d'une fonction.
3. Déterminer si une fonction est intégrable.

Exercice. (Ch2 Ex1.8) Posons $F(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est bien définie.
2. En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2\,\pi}$, montrer que F est une bijection $\mathbb{R}\to]0,\sqrt{2\,\pi}[$.

Remarque 70.

1. Trouver toutes les singularités (en générale, sur $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. S'il s'agit une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$, vous pouvez soit étendre la domaine de la fonction à $\mathbb{R}$, soit l'étudier directement. En tout cas, c'est possible que a ou b est une singularité. Cela veut dire que, une singularité n'appartient pas nécessairement à la domaine).
2. Étudier les singularités (étude asymptotique).

Solution.

1. Les singularités de $f:t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2/2}$ sur $[x,+\infty[$: $\{+\infty\}$ (il n'y a pas de $m\in\mathbb{R}$ t.q. pour tout $x\geq m$, $f(t)=0$, donc $+\infty$ est une singularité; pour tout $x\in[x,+\infty]$, comme f est continue au point x, f est localement bornée au point x, donc x n'est pas une singularité). $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,t^2=0\Longrightarrow|\mathrm{e}^{-t^2/2}|\lesssim t^{-2}, t\to+\infty$. Comme $t\mapsto t^{-2}$ est intégrable sur $[y,+\infty]$ (où y est suffisament grand), c'est-à-dire, $t\mapsto t^{-2}$ est localement intégrable au point $\{+\infty\}$, $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ l'est aussi. Donc $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est intégrable sur $[x,+\infty]$ i.e. F est bien définie.
2. F est strictement décroissante: pour tout $x<y$, $F(y)-F(x)=\int_x^y\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\geq\int_x^y\mathrm{e}^{-\max\{x^2,y^2\}/2}\,\mathrm{d}t=(y-x)\,\mathrm{e}^{-\max\{x^2,y^2\}/2}>0$.

   Remarque 71. En effet, si $f\geq 0$ et $\int f=0$, alors $f=0$ p.p.: pour tout $n\in\mathbb{N}_{>0}$, on a $\int f\geq\int 1_{\{f\geq 1/n\}}f\geq\lambda(\{f\geq 1/n\})/n$, $\lambda(\{f\geq 1/n\})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}_{>0}$. Donc $\lambda(\{f>0\})=\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\geq 1/n\})=0$.

   Ensuite, F est continue ($x\mapsto F(0)-F(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est continue par le thm fon de l'analyse, donc F l'est aussi)

   Remarque 72. En général, pour tout $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}f$ est continue, mais c'est plus difficile. Quand $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est continue, on peut utiliser le thm fon de l'analyse comme au-dessus.

   donc F est une bijection $\mathbb{R}\to]\lim_{x\to+\infty}F(x),\lim_{x\to-\infty}F(x)[$. Il suffit de montrer que $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}x$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

   Tout d'abord, par Beppo-Levi, comme F est décroissante, $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{n\to\infty}F(-n)=\int_{\mathbb{R}}1_{[x,+\infty]}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

   Remarque 73. Quand $\lim_{x\to\infty}f(x)$ existe, alors $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(n)$.

   Ensuite, aussi par Beppo-Levi, $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ (similaire), comme $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

Remarque 74. Pour une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,

1. Si f est strictement croissante (ou strictement décroissante), alors f est injective.
2. **(Thm des valeurs extrêmes)** Si f est continue, alors $f([a,b])=[\min f([a,b]),\max f([a,b])]$.
3. Si f est continue et strictement croissante (ou resp. strictement décroissante), alors f est injective, $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ (resp. $f([a,b])=[f(b),f(a)]$). Donc f définit une bijection continue $\tilde{f}:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ (resp. $[a,b]\to[f(b),f(a)]$).
4. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante, alors $g(\mathbb{R})=g(\bigcup_{\alpha>0}[-\alpha,\alpha])=\bigcup_{\alpha>0}g([-\alpha,\alpha])=\bigcup_{\alpha>0}[g(-\alpha),g(\alpha)]$. Comme g est strictement croissante, $I:=\bigcup_{\alpha>0}[g(-\alpha),g(\alpha)]=]\lim_{\alpha\to+\infty}g(-\alpha),\lim_{\alpha\to+\infty}g(\alpha)[$, alors g définit une bijection continue $\mathbb{R}\to I$. Similaire pour g strictement décroissante.

Exercice. (Partiel 2020) Déterminer

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n^2+k^2}$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n^2+k^2} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n+3k)}{n^2+k^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3(k/n)}{1+(k/n)^2}=f(k/n)\end{aligned}$$

Considérons la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1+3x}{1+x^2}$. C'est une fonction continue, donc la somme de Riemann converge à l'intégral

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1+3x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+x^2}\\ &= \arctan x|_0^1+\frac{3}{2}\ln|1+x^2||_0^1\\ &= \pi/4+\frac{3}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

Remarque 75. Quand f est continue sur $[a,b]$ ou $f\in\mathcal{L}^1([a,b])$ est monotone, la somme de Riemann converge à l'intégrale $\int_a^b f$.

Exercice. (Rattrapage 2020) Soit $x\in\mathbb{R}_{>0}$. Montrer que $t\mapsto\sin(t)/(t^2+x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Solution. Singularités: $\{+\infty\}$.

Étude de $+\infty$: $|\sin(t)/(t^2+x^2)|\lesssim 1/t^2$ quand $t\to+\infty$, et par la critère de Riemann, $1/t^2$ est localement intégrable au point $+\infty$, donc $t\mapsto\sin(t)/(t^2+x^2)$ l'est aussi. En conclusion, $t\mapsto\sin(t)/(t^2+x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Remarque 76. Quand on rencontre une fonction $P(\sin x,\cos x)$, pour étudier la singularité $+\infty$, on peut commencer par majorisation en utilisant $|\sin x|\le 1$ et $|\cos x|\le 1$. Par exemple,

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$$

Dans ce cas, on peut montrer que $x^{-2}\sin(x)$ est localement intégrable au point $+\infty$. Mais cette méthode ne marche pas si la majorisation n'est pas (localement) intégrable. Par exemple, $|x^{-1}\sin(x)| \leq |x|^{-1}$ mais x^{-1} n'est pas localement intégrable au point $+\infty$. Dans ce cas, on **ne peut pas** en déduire que $x^{-1}\sin(x)$ n'est pas localement intégrable au point $+\infty$.

Remarque 77. Si on remplace t^2+x^2 par t^2-t+x^2, i.e., $t \mapsto \sin(t)/(t^2-t+x^2)$ est aussi intégrable quand $x > 1/2$. En effet, singularité $\{+\infty\}$ comme $x > 1/2$ (on le verra bientôt). Alors quand $t \to +\infty$

$$\left|\frac{\sin t}{t^2-t+x^2}\right| \leq \frac{1}{t^2-t+x^2}$$

Comme $1/(t^2-t+x^2) \sim 1/t^2$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto 1/t^2$ est localement intégrable au point $+\infty$, $t \mapsto 1/(t^2-t+x^2)$ l'est aussi. Donc $t \mapsto \sin(t)/(t^2-t+x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty]$.

En revanche, quand $0 < x \leq 1/2$, la fonction $f: t \mapsto \sin(t)/(t^2-t+x^2)$ est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$? Tout d'abord, $+\infty$ est une singularité. Nous devons déterminer si les racines de t^2-t+x^2 appartiennent à $[0,+\infty[$. Les racines sont $0 < \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-x^2} < 1$. On écrit $x_1 := \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ et $x_2 := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$. Alors $0 < x_1 \leq x_2 < 1$.

1. Quand $x = 1/2$, alors $x_1 = x_2 = 1/2$, alors les singularités potentielles: $\{1/2, +\infty\}$. Il suffit de déterminer si f est localement intégrable au point $1/2$ et $+\infty$. En effet, f n'est pas localement intégrable au point $1/2$: $f(t) = \sin(t)/(t-1/2)^2$. Pour cela, on trouve un équivalent de f quand $t \to 1/2$: $f(t) \sim C\,(t-1/2)^{-2}$ où $C = \sin(1/2)$ est **non-zéro**. En suite, $t \mapsto (t-1/2)^{-2}$ n'est pas localement intégrable au point $1/2$ par la critère de Riemann.

   Remarque 78. (Riemann) $t \mapsto |t|^\alpha$ est localement intégrable au point 0 ssi $\alpha > -1$, $t \mapsto |t|^\alpha$ est localement intégrable au point $+\infty$ ssi $\alpha < -1$.

   Donc f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty]$.

2. Quand $0 < x < 1/2$, alors $0 < x_1 < x_2 < 1$. Les singularités potentielles: $\{x_1, x_2, +\infty\}$. En effet, f n'est pas localement intégrable au point x_1. On trouve un équivalent $f(t)$ quand $t \to x_1$. Tout d'abord, $t^2-t+x^2 = (t-x_1)\,(t-x_2)$. Donc quand $t \to x_1$, on a $f(t) \sim \frac{\sin(x_1)}{(x_1-x_2)}\,(t-x_1)^{-1}$ où $\frac{\sin(x_1)}{(x_1-x_2)} \neq 0$ parce que $0 < x_1 < 1$. Par la critère de Riemann, $t \mapsto |t-x_1|^{-1}$ n'est pas localement intégrable au point x_1, donc f n'est pas intégrable.

C'est une exemple: si on commence par $|\sin t| \leq 1$, alors on va échouer. Il faut étudier toutes les singularités.

Exercices non-traités

Exercice. (Ch2 Ex1.8, difficile) Posons $F(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Donner un équivalent de $F^{-1}(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice. (Partiel 2020) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(t) = n\,\frac{\ln(2+t)}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Solution. Singularités: [il faut séparer $n=0$ et $n>0$]

Exercice. (Ch2 Ex1.7) Soient $f\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ décroissante et positive et $g\in C^0([a,b],\mathbb{R})$. On pose $G(t)=\int_a^t g$.

1. Montrer que $\int_a^b f\,g=f(b)\,G(b)+\int_a^b(-f')\,G$.

2. En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ t.q. $\int_a^b f\,g=f(a)\int_a^c g$.

Exercice. (Partiel 2020) Déterminer $\lambda(\{t\in\mathbb{R}\,|\,|\cos t|=1\})$.

Exercice. (Partiel 2020) Vrai ou faux

1. $\lambda_{\mathbb{R}^2}([0,1]\times\{0\})=0$.

2. Toute fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est bornée.

3. Toute fonction continue sur un intervalle borné est intégrable.

4. Soient $f,g\in C^0(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f\leq g$ et $\int_{\mathbb{R}}f=\int_{\mathbb{R}}g$, alors $f=g$.

Exercice. (Examen 2020) Soient $j,k\in\mathbb{N}$. Montrer que $x\mapsto x^j\,(\ln x)^k$ est intégrable sur $[0,1]$. Posons

$$I_{j,k}:=\int_0^1 x^j\,(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$$

Déterminer la valeur de $I_{j,0}$, en suite la valeur de $I_{j,k}$.

Exercice 7. Déterminer l'intégrabilité de

1. $x\mapsto\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}$ sur $[1,+\infty[$.

2. $x\mapsto|\ln x|^p$ sur $[0,1]$.

3. $x\mapsto\frac{1}{\sqrt[3]{x^2\,(x-1)^2}}$ sur $[0,+\infty[$.

4. $x\mapsto\frac{1}{x^p\,(1+x^2)}$ sur $[0,+\infty[$ pour $p>0$.

Exercice 8. Déterminer si $x\mapsto\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

7 Séance 31 mars 2021

Théorème 79. **(Convergence dominée)** *Soit* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *un ensemble mesurable et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables sur* A *t.q.*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *p.p.* $x \in A$ *(par exemple, quand* $f_n \to f$ *simplement sur* $A \setminus E$ *où* $E \subseteq A$ *est un sous-ensemble fini)*

2. *Il existe une fonction mesurable, positive et intégrable* g *t.q. pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on ait* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in A$

Alors f *est intégrable et*

$$\int_A f = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n$$

De plus, $\lim_{n \to \infty} \int_A |f_n - f| = 0$.

Remarque 80. Quand A est un intervalle fini (ou plus généralement, $\lambda(A) < +\infty$), c'est beaucoup plus faible que la convergence uniforme $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Par exemple, si $\lambda(A) < +\infty$ et il existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in A$, on ait $|f_n(x)| \leq M$ (c'est-à-dire, la suite (f_n) est uniformément bornée, alors $\int_A \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n$.

Exemple 81. On prend $A = [0, \pi / 2]$ et $f_n(x) = \sin^n x$. On remarque que $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$. Alors $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ quand $x \in A \setminus \{\pi / 2\}$ et $f(\pi / 2) = \lim_{n \to \infty} f_n(\pi / 2) = 1$. Donc $\lim_{n \to \infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n \to \infty} f_n = 0$. Mais $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (comme $\lim_{x \to (\pi/2)^-} |f_n(x) - f(x)| = 1$ par la continuité de f_n et f sur $[0, \pi / 2[$), donc $f_n \to f$ n'est pas uniforme.

Théorème 82. **($\sum$ et $\int$)** *Soit* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *un ensemble mesurable et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur* A *t.q.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_A |f_n| < +\infty$$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est intégrable, et*

$$\int_A \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n$$

Théorème 83. *Soient* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *un ensemble mesurable,* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ouvert, et* $f : A \times \Lambda \to \mathbb{C}$ *une fonction t.q. pour tout* $t \in \Lambda$ *(comme un « paramètre »), la fonction* $f(\cdot, t) : A \to \mathbb{C}$ *est intégrable. On note* F *la fonction* $\Lambda \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_A f(\cdot, t)$.

Continuité. *Supposons que*

1. **(Continuité par rapport au paramètre)** *La fonction* $f(x, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{C}$ *est continue p.p.* $x \in A$.

2. **(Majoration indépendante du paramètre)** *Il existe une fonction intégrable* $g : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *t.q.* ***pour tout*** $\boldsymbol{t \in \Lambda}$, $|f(x, t)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in A$.

Alors la fonction F *est continue.*

Dérivée. *Supposons que* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$*, et que*

1. **(Dérivabilité par rapport au paramètre)** *La fonction* $f(x, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{C}$ *est dérivable p.p.* $x \in A$.

2. *Il existe une fonction intégrable $g\colon A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q.* **pour tout $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{\Lambda}$**, $|\partial_t f(x,t)|\leq g(x)$ *p.p.* $x\in A$.

Alors la fonction F est dérivable, et

$$F'(t) := \partial_t \int_A f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_A \partial_t f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Exercice. (Ch2 Ex2.9)

1. Soit $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable. $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(r)=\{p\in\mathbb{R}^d\,|\,\|p\|\leq r\}$

   a. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} f\,1_{B_{\mathbb{R}^d(n)}}$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f\,1_{|f|\leq n}$ convergent vers $\int_{\mathbb{R}^d} f$ quand $n\to\infty$.

   b. On suppose que $d=1$. Montrer que la fonction $x\mapsto\int_0^x f$ est continue.

2. Calculer les limites quand $n\to\infty$

   $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^{\pi}\cos(x/n)\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{e}^{-n|x|}\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$ $\quad\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$

   Avertissement 84. Tout d'abored, il faut montrer que $t\mapsto\frac{\sin^n t}{t\,(1+t)}$ et $t\mapsto\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}_{>0}$.

3. Le but de cette question est de calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

   a. Soit $x\in\mathbb{R}$ t.q. $|x|<1$. Rappeler la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

   b. En déduire, pour $x>0$, une nouvelle expression pour $\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}$.

   c. Pour tout $n\geq 1$, calculer $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x$. Conclure.

Solution.

1. Convergence dominée

   a. La convergence simple: pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to\infty} f(x)\,1_{\overline{B}_{\mathbb{R}^d(n)}}(x)=f(x)$ (comme quand $n\geq\|x\|$, on a $1_{\overline{B}_{\mathbb{R}^d(n)}}(x)=1$, donc la suite $(f(x)\,1_{\overline{B}_{\mathbb{R}^d(n)}}(x))_{n\in\mathbb{N}}=(0,0,\ldots,0,f(x),f(x),\ldots)$). Il faut alors trouver une fonction intégrable $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{+\infty\}$ t.q. $|f(x)\,1_{\overline{B}_{\mathbb{R}^d(n)}}(x)|\leq g(x)$. On peut prendre $g(x)=|f(x)|$. Par le thm de conv. dom., on a …

   La convergence simple: pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to\infty} f(x)\,1_{|f|\leq n}(x)=f(x)$. $|f(x)\,1_{|f|\leq n}(x)|\leq|f(x)|$. Par le thm de conv. dom., on a …

   b. Par la caractérisation sequentielle, il suffit de montrer que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, on a $\lim_{n\to\infty}\int_0^{x_n}f=\int_0^{\lim_{n\to\infty}x_n}f$. On peut réécrire $\int_0^x f=\int_{\mathbb{R}}g_x\,f$ où $g_x=1_{]-\infty,x]}-1_{]-\infty,0[}$. Alors la convergence simple quand $t\neq x$: $1_{]-\infty,x_n]}(t)\to 1_{]-\infty,x]}(t)$ (quand $t<x$, alors il existe N t.q. pour tout $n\geq N$, on a $x_n>t$ donc $1_{]-\infty,x_n]}(t)=1=1_{]-\infty,x]}(t)$; quand $t>x$, alors il existe N t.q. pour tout $n\geq N$, on a $x_n<t$ donc $1_{]-\infty,x_n]}(t)=0=1_{]-\infty,x]}(t)$). et $\lim_{n\to\infty}g_{x_n}(t)\,f(t)=g_x(t)\,f(t)$. En résumé, $g_{x_n}f\to f$ p.p. (plus précisément, sur $\mathbb{R}\setminus\{x\}$).

   Ensuite, $|g_x|\leq 1$ donc $|g_{x_n}(t)\,f(t)|\leq|f(t)|$. Par le thm de conv. dom.

2. Les limites

Convergence simple: quand $1 \leq x < \mathrm{e}$, on a $\lim_{n\to\infty} (\ln x)^n = 0$, donc $(\ln x)^n \to 0$ p.p. $x \in [1, \mathrm{e}]$ (plus précisément, $[1, \mathrm{e}] \setminus \{\mathrm{e}\}$). Ensuite, $|\ln x|^n \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1, \mathrm{e}]$ où $g(x) = 1$ est intégrable sur $[1, \mathrm{e}]$. Alors $\lim_{n\to\infty} \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 0 \,\mathrm{d}x = 0$.

Convergence simple: $\lim_{n\to\infty} \cos(x/n) = 1$, $|\cos(x/n)| \leq 1$ qui est intégrable sur $[0, \pi]$. Donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \cos(x/n) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x = \pi$.

Convergence simple: quand $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} x^3 \mathrm{e}^{-n|x|} = 0$ et $|x^3 \mathrm{e}^{-n|x|}| \leq 1$ qui est intégrable sur $[-1, 1]$. Alors $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{e}^{-n|x|} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 0 \,\mathrm{d}x = 0$.

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t\,(1+t)} \,\mathrm{d}t$, deux singularités (potentielles): $0, +\infty$. $\frac{\sin^n t}{t\,(1+t)} \sim t^{n-1}$. Comme $n \geq 1$, c'est localement bornée au point 0, donc localement intégrable au point 0. Quand $t \to +\infty$, $\left|\frac{\sin^n t}{t\,(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t\,(1+t)} \sim \frac{1}{t^2}$, par la critère de Riemann, c'est localement intégrable au point $+\infty$. En résumé, $t \mapsto \frac{\sin^n t}{t\,(1+t)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Ensuite, quand $t \notin \{2\,k\,\pi \pm \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (i.e. $|\sin t| < 1$) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^n t}{t\,(1+t)} = 0$. De plus $\left|\frac{\sin^n t}{t\,(1+t)}\right| \leq \left|\frac{\sin t}{t\,(1+t)}\right|$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t\,(1+t)} \,\mathrm{d}t = 0$.

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)} \,\mathrm{d}t$. Singularités potentielles: $0, +\infty$. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)} = 1$, donc localement intégrable au point 0. Quand $t \to +\infty$, $\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t^n\,(1+t)} \sim \frac{1}{t^{n+1}}$. Par la critère de Riemann, la fonction est localement intégrable au point $+\infty$. En suite, la limite simple: quand $0 < t < 1$, $f_n(t) := \frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)} \sim \frac{t^n}{t^n\,(1+t)} = \frac{1}{1+t}$ quand $n \to \infty$. quand $t > 1$, $\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t^n\,(1+t)} \to 0$ quand $n \to \infty$. En résumé, $f_n \to f$ p.p. $t \in [0, +\infty]$ où $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$. De plus, quand $0 < t \leq 1$, comme $|\sin(t^n)| \leq t^n$, on a $\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}\right| \leq \frac{t^n}{t^n\,(1+t)} = \frac{1}{1+t}$. Quand $t > 1$, on a $\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n\,(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t^n\,(1+t)} \leq \frac{1}{t\,(1+t)}$. On prend $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & t \leq 1 \\ \frac{1}{t\,(1+t)} & t > 1 \end{cases}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $t \in [0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq g(t)$. De plus, on vérifie que g est intégrable sur $[0, +\infty]$. Par le thm de conv. dom., $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$.

3.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ quand $|x| < 1$.

b. $\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{e}^{-x} \sin x = \mathrm{e}^{-x} \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \sin x \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$.

c. Tout d'abord, il faut montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx} \sin x$ est intégrable sur $[0, +\infty]$ quand $n \in \mathbb{N}_{>0}$. En suite,

$$\begin{aligned} I_n := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \,\mathrm{d}(\cos x) \\ &\overset{\text{IPP}}{=\!=} -\mathrm{e}^{-nx} \quad \cos \quad x|_0^{+\infty} \quad - \\ &\quad n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \cos x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}(\sin x)\\
&\overset{\text{IPP}}{=\!=} 1-n\left(\mathrm{e}^{-nx}\sin x|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 1-n^2 I_n
\end{aligned}
$$

Donc $I_n = \frac{1}{n^2+1}$. Pour évaluer l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$. Pour intervertir $\int$ et $\sum$, il faut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}|\sin x|\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x < +\infty$. Par Beppo-Levi, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}|\sin x|\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\sin x|\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

On remarque que $x\mapsto|\sin x|/(\mathrm{e}^x-1)$ est intégrable sur $[0,+\infty]$: il faut vérfier que la fonction est localement intégrable aux points $\{0, +\infty\}$. Quand $x\to 0^+$, $\lim_{x\to 0^+}|\sin x|/(\mathrm{e}^x-1)=1$, donc la fonction est localement intégrable au point 0. Quand $x\to\infty$, $|\sin x|/(\mathrm{e}^x-1)\leq 1/(\mathrm{e}^x-1)\sim\mathrm{e}^{-x}$ qui est localement intégrable au point $+\infty$. En résumé, $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x<+\infty$. Donc on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}
\end{aligned}
$$

Exercice. (Ch2 Ex2.11) Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Solution. Tout d'abord, c'est bien définie. Ensuite, par le changement de variable $y=n\,x$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{n\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{1+(y/n)^2}$$

Limite simple: $n\to\infty$, $\mathrm{e}^{-y}/(1+(y/n)^2)=\mathrm{e}^{-y}$. De plus, $\left|\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1+(y/n)^2}\right|\leq \mathrm{e}^{-y}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty]$. Par le thm de conv. dom., on a $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{1+(y/n)^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=1$.

8 Séance 7 avr 2021

Exercice. (Ch2 Ex2.12) Soit $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\,f(x)}{1+n^2\,x^2}\,\mathrm{d}x$$

[Indication: considérons le changement de variable $y=n\,x$].

Solution. Quand $n\in\mathbb{N}_{>0}$, $\int_0^{+\infty}\frac{n\,f(x)}{1+n^2\,x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)\,\mathrm{d}(n\,x)}{1+(n\,x)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{f(y/n)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$.

Comme f est bornée, il existe $M\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. $|f(x)|\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors la fonction $y\mapsto(1+y^2)^{-1}\,f(y/n)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: quand $y\to+\infty$, $|(1+y^2)^{-1}\,f(y/n)|\leq M\,(1+y^2)^{-1}\sim M y^{-2}$ est localement intégrable au point $+\infty$ par la critère de Riemann.

Afin d'utiliser le thm de conv. dom., il faut trouver une fonction intégrable $g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|(1+y^2)^{-1}\,f(y/n)|\leq g(y)$. On peut prendre $g(y)=M\,(1+y^2)^{-1}$.

Donc $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(y/n)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{f(y/n)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=f(0)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{f(0)\,\pi}{2}$.

Exercice. (Ch2 Ex3.15) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue. On définit $F(x):=\int_0^1\sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t$. Justifier que F est bien définie, et étudier la continuité et la dérivée de F.

Solution. La fonction $t\mapsto\sqrt{f(t)+x^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

Remarque 85. (Majoration locale) Soit I un intervalle. Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est continue / dérivable ssi pour tout $x\in I$, il existe un voisinage V de x dans I t.q. f est continue / dérivable sur V. On peut aussi le vérifier sur tous les intervalles compacts.

Pour montrer que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, il suffit de montrer que, pour tout intervalle compact $I\subseteq\mathbb{R}$, la fonction $F|_I:I\to\mathbb{R}$ est continue. Fixons un intervalle compact $I\subseteq\mathbb{R}$. Afin d'utiliser le thm de continuité des intégrales, il suffit de trouver une fonction intégrable $g:[0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $x\in I$, on a $\sqrt{f(t)+x^2}\leq g(t)$. Comme I est borné, on prend $A\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. $I\subseteq[-A,A]$, alors $\sqrt{f(t)+x^2}\leq\sqrt{f(t)+A^2}=:g(t)$ pour tout $x\in I\subseteq[-A,A]$. Donc par le thm de .., la fonction F est continue sur I.

Montrer que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\partial_x\Big(\sqrt{f(t)+x^2}\Big)=\frac{x}{\sqrt{f(t)+x^2}}$ quand $x\neq 0$. Pour tout intervallé compact $I\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$, il faut trouver une fonction intégrable $g:[0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $x\in I$, on a $\frac{|x|}{\sqrt{f(t)+x^2}}\leq g(t)$. On peut essayer de prendre $M:=\sup_{x\in I}|x|$

$$g(t):=\sup_{x\in I}\frac{|x|}{\sqrt{f(t)+x^2}}=\sup_{x\in I}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(t)}{|x|^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(t)}{M^2}}}$$

où le dernier égalité est une corollaire de la croissance de la fonction $x\mapsto(1+f(t)/x^2)^{-1/2}$ quand $x>0$. La fonction g est continue sur $[0,1]$, donc intégrable. Par le thm de dérivabilité des intégrales, la fonction F est dérivable sur I, donc sur $\mathbb{R}\setminus 0$, et la dérivée est donnée par

$$F'(x)=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{f(t)+x^2}}\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, on va étudier que la dérivabilité de F au point $0\in\mathbb{R}$. Pour cela, on prend $E_0 := \{t \in [0,1] \mid f(t) = 0\}$ et $E_1 := [0,1] \setminus E_0$, Alors

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{E_0} \sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t + \int_{E_1} \sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{E_0} |x|\,\mathrm{d}t + \int_{E_1} \sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(E_0)\,|x| + \int_{E_1} \sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

La preuve précédente montre que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \int_{E_1} \sqrt{f(t)+x^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction F est dérivable au point 0 ssi la fonction $x \mapsto \lambda(E_0)\,|x|$ est dérivable au point 0, ssi $\lambda(E_0) = 0$, c'est-à-dire, $\{f = 0\}$ est négligéable.

Exercice. (Ch2 Ex3.16) Soit $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ définie par

$$
\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue.
2. Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\varphi' - \varphi = -C / \sqrt{t}$ où $C = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. Résoudre cette EDO, calculer $\varphi(0)$ et montrer que $C = \sqrt{\pi}$.

Solution.

1. Pour montrer que φ est bien définie et continue, par la continuité de $t \mapsto (1+x^2)\,\mathrm{e}^{-tx^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que **(majoration locale)** , pour tout intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, il existe une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $t \in I$, on a $(1+x^2)^{-1}\,\mathrm{e}^{-tx^2} \leq g(t)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$. En effet, **(majoration globale)** il existe une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $(1+x^2)^{-1}\,\mathrm{e}^{-tx^2} \leq g(x)$ p.p $x \in \mathbb{R}$. On peut prendre $g(x) = (1+x^2)^{-1}$.

   Remarque 86. En généralement, on peut vérifier l'intégrabilité et la continuité en même temps par une majoration.

2. $\partial_t((1+x^2)^{-1}\,\mathrm{e}^{-tx^2}) = -(1+x^2)^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-tx^2}$. Afin d'utiliser le thm de dérvabilité des intégrales, **(majoration locale)** pour tout intervalle compact $I \subseteq]0, +\infty[$, il suffit de trouver une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q. pour tout $t \in I$, on a $|-(1+x^2)^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-tx^2}| \leq g(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$. En effet, on peut prendre $g(x) := \sup_{t \in I} |-(1+x^2)^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-tx^2}| = (1+x^2)^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x^2 \inf(I)}$. Comme I est compact, $\inf(I) > 0$, alors g est intégrable. Par conséquent, $\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{-1}\,x^2\,\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\varphi(t) - \varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x \overset{y = x\sqrt{t}}{=\!=\!=\!=} (\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y) / \sqrt{t}$.

4. $-C\,\mathrm{e}^{-t} / \sqrt{t} = \mathrm{e}^{-t}\,(\varphi' - \varphi) = (\mathrm{e}^{-t}\,\varphi)'$, et $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)\,\mathrm{d}x = \pi$. Alors $\mathrm{e}^{-t}\,\varphi(t) - \varphi(0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t (\mathrm{e}^{-s}\,\varphi(s))'\,\mathrm{d}s = -C \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}t / \sqrt{s}$. Comme $s \mapsto \mathrm{e}^{-s} / \sqrt{s}$ est intégrable sur $[0, t]$ (par la critère de Riemann), $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}t / \sqrt{s} = \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}t / \sqrt{s} = \int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}(u^2) / u = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, donc

$$
\mathrm{e}^{-t}\,\varphi(t) - \pi = -2\,C \int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -C \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad (2)
$$

Comme $\varphi(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$, et $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, prend $t \to +\infty$ dans (2), on a $-\pi = -C^2$, donc $C = \sqrt{\pi}$.

9 Séance 14 avr 2021

Remarque 87. Soit $f \in C[a,b]$, alors la somme de Riemann $S_N(f) = \sum_{k=1}^N \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{N}\right) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $N \to \infty$. On peut remplacer $\sum_{k=1}^N$ par $\sum_{k=0}^N$. En effet, $T_N(f) := \sum_{k=0}^N \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{N}\right) = \frac{b-a}{N} f(a) + S_N(f)$. Lorsque $N \to \infty$, $\frac{b-a}{N} f(a) \to 0$, donc $\lim_{N\to\infty} T_N(f) = \lim_{N\to\infty} S_N(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, mais on doit réproduire cette preuve dans l'examen.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Poisson $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)$ est intégrable sur $[0,\pi]$. On note $I(x) := \int_0^\pi \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $I(x) - I(1/x) = 2\,\pi\ln|x|$.

3. Montrer que la fonction $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. [pas fini]

4. Montrer que la fonction I est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. [non-traité]

5. Montrer que $I'(x) = 0$ quand $|x| < 1$. En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. [non-traité]

Solution.

1. On remarque que la fonction $y \mapsto \ln y$ est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0,\pi]$, $x^2 - 2\,x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq 0$, et c'est zéro ssi $x = \cos\theta$ et $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire, soit $\theta = 0$ et $x = 1$, soit $\theta = \pi$ et $x = -1$. Quand $x \notin \{\pm 1\}$, la fonction $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)$ est continue sur $[0,\pi]$, donc intégrable. Quand $x = 1$, singularité: $\{0\}$, $\ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1) = \ln(2 - 2\cos\theta) = \ln(\theta^2 + o(\theta^3)) = \ln(\theta^2\,(1 + o(\theta))) = 2\ln\theta + \ln(1 + o(\theta)) = 2\ln\theta + o(\theta) \sim 2\ln\theta$ quand $\theta \to 0^+$, donc par critère de Bertrand, la fonction $\theta \mapsto \ln(2 - 2\cos\theta)$ est localement intégrable au point 0. Pour $x = -1$, $\ln(2 + 2\cos\theta) = \ln(2 - 2\cos(\pi - \theta))$ et similaire.

2. $I(1/x) = \int_0^\pi \ln(x^{-2} - 2\,x^{-1}\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi (\ln x^{-2} + \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi -2\ln|x|\,\mathrm{d}\theta + I(x) = -2\,\pi\ln|x| + I(x)$.

3. Pour tout intervalle compact $[a,\,b] \subseteq \mathbb{R}$, il suffit d'étudier $\sup_{x\in[a,b]} |\ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)|$ [pas fini]

Exercices non-traités

Exercice 10. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Poisson $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2\,x \cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $I(x) := \int_0^\pi \ln(x^2 - 2\,x \cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que la fonction I est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. Montrer que $I'(x) = 0$ quand $|x| < 1$. En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. (Frullani) Soient $a > b > 0$ et $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction continue t.q. la limite $f(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe.

1. Supposons que la fonction $t \mapsto (f(a\,x) - f(b\,x))/x$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(a\,x) - f(b\,x)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{a}{b}$.

2. **(Ch2 Ex4.20)** En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-b\,t} - \mathrm{e}^{-a\,t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln \frac{a}{b}$.

10 Séance 5 mai 2021

Théorème 88. (Fubini) *Soient $E\subseteq\mathbb{R}^m$ et $F\subseteq\mathbb{R}^n$ deux parties mesurables (alors $E\times F\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$ l'est aussi).*

1. *Soit $f:E\times F\to[0,+\infty]$ une fonction mesurable* ***positive****, alors les fonctions $x\mapsto\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $y\mapsto\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x$ sont mesurables, et*

$$\int_{E\times F} f=\int_E\left(\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_F\left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

2. *Soit $f:E\times F\to\mathbb{C}$ une fonction* ***intégrable****, alors les fonctions $x\mapsto\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $x\mapsto\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x$ sont intégrables, et*

$$\int_{E\times F} f=\int_E\left(\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_F\left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Théorème 89. (Chg de var $\mathbb{R}^d$) *Soient $U,V\subseteq_{\text{ouvert}}\mathbb{R}^d$, et $\varphi:U\to V$ un C^1-diffeo. Alors une fonction $f:V\to\mathbb{C}$ est intégrable ssi $(f\circ\varphi)\,|\det J_\varphi|:U\to\mathbb{C}$ l'est aussi, et on a*

$$\int_V f=\int_U(f\circ\varphi)\,|\det J_\varphi|$$

Remarque 90. Pour les coordonées polaires, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ où $J_\varphi=r$.

Évaluer un intégrale double d'une fonction positive

Exercice. (Ch2 Ex4.18) Calculer $\int_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2\,y}$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\geq 1 \text{ et } x^{-1}\leq y\leq x\}$.

Solution. $f(x,y)=x^{-2}\,y^{-1}\,1_D(x,y)\geq 0$, donc par le thm de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty}\left(\int_{1/x}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{x^2\,y}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,(\ln(x)-\ln(1/x))\\ &= 2\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= 2\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= -2\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -2\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A\\ &= 2\end{aligned}$$

Alternativement, $\begin{cases} x\geq 1\\ x^{-1}\leq y\leq x\end{cases}\iff\begin{cases} y>0\\ x\geq\max\{1/y,y\}\end{cases}$ alors

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{\max\{1/y,y\}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\,y}$$

Intégrabilité

Exercice. (Ch2 Ex4.19) La fonction $(x,y)\mapsto(x-y)\,(x+y)^{-3}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[^2$?

Solution. Cette fonction est intégrable ssi $\int_{[1,+\infty[^2} |x-y|\,(x+y)^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty$ par définition. On remarque que $\{x \geq 1, y \geq 1, y \geq x\} \subseteq [1,+\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
\int_{[1,+\infty[^2} |x-y|\,(x+y)^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\geq \int_{\{x\geq 1, y\geq 1, y\geq x\}} |x-y|\,(x+y)^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_x^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{2x}^{+\infty} \frac{u-2\,x}{u^3}\,\mathrm{d}u \\
\int_{2x}^{+\infty} \frac{u-2\,x}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \int_{2x}^{+\infty} (u^{-2} - 2\,x\,u^{-3})\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_{2x}^{+\infty} (\cdots)\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{A\to+\infty} (-u^{-1} + x\,u^{-2})|_{2x}^{A} \\
&= \frac{1}{4\,x} \\
\int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{2x}^{+\infty} \frac{u-2\,x}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4\,x} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Donc $(x,y) \mapsto (x-y)\,(x+y)^{-3}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty]^2$.

Remarque 91. Pour évaluer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} f$ pour une fonctione mesurable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$:

1. Déterminer si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, i.e. $\int_{\mathbb{R}^2} |f| < +\infty$.
2. Si oui, on peut l'évaluer par le thm de Fubini (ou avec un changement de variable).

Exercice. (Ch2 Ex4.22) Barreau de longueur L, densité $\rho(x) = x^2$.

1. Calculer la masse du barreau.
2. Calculer l'abscisse du centre de gravité du barreau.

Une plaque homogène de densité constante 1: $P = \{(x,y) \mid x \in [0,L]$ et $0 \leq y \leq x^2\}$.

3. Faire un dessin, et exprimer la masse de la plaque, puis l'abscissi de son centre de gravité.
4. Calculer l'ordonée du centre de gravité.

Remarque 92. $E \subseteq \mathbb{R}^d$, le centre de gravité $(u_1, \ldots, u_d)$ où $u_i := \lambda(E)^{-1} \int_E x_i\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_d$.

Solution.

1. $m = \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x = L^3/3$.
2. $x_G = \left(\int_0^L x\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)/m = (L^4/4)/(L^3/3) = 3\,L/4$.
3. $m = \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^L \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}y = \int_0^L x^2\,\mathrm{d}x = L^3/3$ et

$$x_G = m^{-1} \int_P x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$y_G = m^{-1}\int_P y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

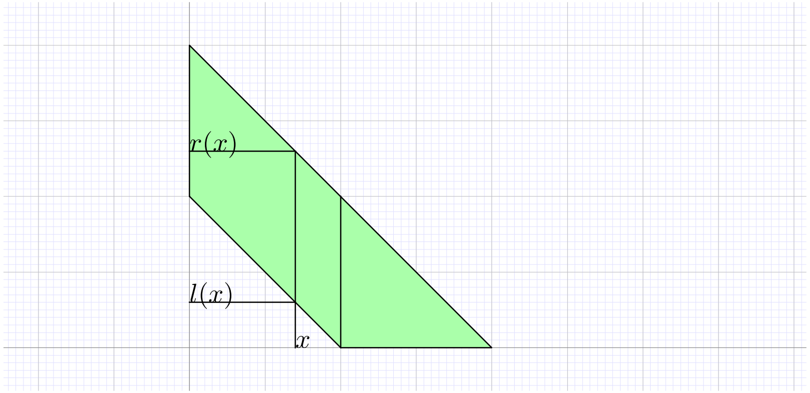
4. On a

$$\begin{aligned}
x_G &= m^{-1}\int_0^L x\,\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\\
&= m^{-1}\int_0^L x^3\,\mathrm{d}x\\
&= 3\,L/4\\
y_G &= m^{-1}\int_0^L \mathrm{d}x\int_0^{x^2} y\,\mathrm{d}y\\
&= m^{-1}\int_0^L \mathrm{d}x\,\frac{x^4}{2}\\
&= (3/L^3)\,(L^5/10)\\
&= 3\,L^2/10
\end{aligned}$$

Exercice. (Ch2 Ex5.23) Calculer l'aire

1. $\{(x,y)\,|\,x\geq 0, y\geq 0\;\text{ et }\;1\leq x+y\leq 2\}$
2. $\{(x,y)\,|\,1\leq x\leq 2\;\text{ et }\;x\leq y\leq \mathrm{e}^x\}$
3. $\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq \pi\;\text{ et }\;\sin^2 x\leq y\leq \sin x\}$
4. $\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,r\leq 1\;\text{ et }\;\pi/2\leq\theta\leq 3\,\pi/2\}$ (il faut les coordonées polaires)

Solution. L'aire de $E\subseteq\mathbb{R}^2$ est $\lambda(E)=\int_{\mathbb{R}^2}1_E$ où $1_E\geq 0$.

1. 

$$\begin{aligned}
\lambda(D) &= \int_0^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}1_D(x,y)\,\mathrm{d}y\\
\int_{\mathbb{R}}1_D(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_{l(x)}^{r(x)}\mathrm{d}y\\
&= 2-x-(1-x)^+\\
r(x) &= 2-x\\
l(x) &= \max\{1-x,0\}=(1-x)^+\\
\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}1_D(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^2(2-x-(1-x)^+)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\,\mathrm{d}x\\
&= 1+1/2\\
&= 3/2
\end{aligned}$$

2. $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-3/2$. Il faut montrer que, pour tout $1\leq x\leq 2$, on a $\mathrm{e}^x\geq x$, mais en effet, $\mathrm{e}^x\geq 1+x>x$ quand $x\geq 0$.

3. Quand $0\leq x\leq\pi$, on a $0\leq\sin x\leq 1$, donc $\sin x\geq\sin^2 x$. On rappelle que $\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$. (alternativement, $\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$). $2-\pi/2$.

4. $]0,1]\times]\pi/2,3\pi/2[\to\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\mid r\leq 1\ \text{ et }\ \pi/2\leq\theta\leq 3\pi/2\}\setminus\{0\}\setminus\{\theta=\pi/2\ \text{ ou }\ 3\pi/2\}$ et un difféomorphisme, donc par le change de variables,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\\ &= \pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\\ &= \pi/2\end{aligned}$$

Remarque 93. Si la domaine est stable par rotation, alors on peut prendre les coordonnées polaires.

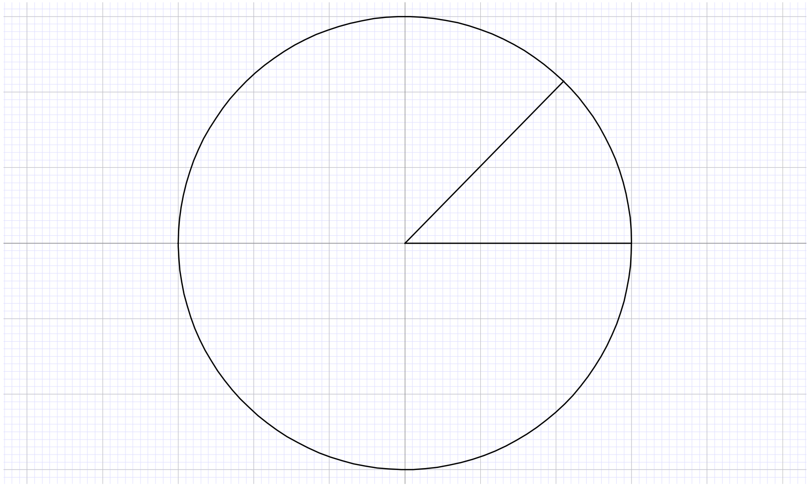
Exercice. (Ch2 Ex5.24) Calculer $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

1. $f(x,y)=x$ et $D=\{z=x+y\,\mathrm{i}\in\mathbb{C}\mid|z|\leq 5\}$.
2. $f(x,y)=y$ et D borné du $\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ délimité par $x^2+y^2=9$, $y=x$ et $y=0$.
3. $f(x,y)=x\,y$ et D $\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ délimité par $x^2+y^2=4$ et $x^2+y^2=25$
4. $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-1/2}$ où $D=\{4\leq x^2+y^2\leq 16\}$

Solution. 1. $]0,5[_{(r)}\times]0,2\pi[_{(\theta)}\to D\setminus 0\setminus\mathbb{R}$, $(r,\theta)\mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un difféomorphisme. On remarque que la fonction f est continue sur D qui est compact, donc f est intégrable. On peut alors utiliser le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}\int_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{]0,5[_{(r)}\times]0,2\pi[_{(\theta)}} r\cos\theta\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^5 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

2. $f\geq 0$ sur D.



$$\int_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{]0,3[_{(r)}\times]0,\pi/4[_{(\theta)}} r\sin\theta\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^3 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/4} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 9\left(1-\sqrt{1/2}\right)
\end{aligned}
$$

3. $f\geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_D x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{]2,5[_{(r)}\times]0,2\pi[_{(\theta)}} r^2\cos\theta\sin\theta\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_2^5 r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{5^4-2^4}{4}\,\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

4. $f\geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_{]2,4[_{(r)}\times]0,2\pi[_{(\theta)}} \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r} \\
&= 4\,\pi
\end{aligned}
$$

Notation 94. *Soit $p\geq 1$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble de fonctions mesurables $\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ t.q. $|f|^p$ soit intégrable. $L^p(\mathbb{R}^d)=\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim$ où $f\sim g$ ssi $f=g$ p.p. Pour $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, on note*

$$
\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\right)^{1/p}
$$

Exercice. (Ch3 Ex1.1) vrai ou faux

1. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\subseteq C_b(\mathbb{R})$ où $C_b(\mathbb{R})=C_b^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble de fonctions continues et bornées.
2. $C_b(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
3. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$ et $f(x)=0$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$, alors $f\in\bigcap_{p\geq 1}\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.
4. $(x\mapsto x^{-1/2}\,1_{]0,1[})\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1\leq p<2$.

Solution.

1. Faux. Par la critère de Riemann, $x\mapsto 1_{[0,1]}(x)\,x^\alpha$ est intégrable mais pas bornée quand $-1<\alpha<0$. Cela implique que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\nsubseteq\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Faux. $f(x)=1\in C_b(\mathbb{R})\setminus\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
3. Vrai: $|f|^p$ est continue sur $[a,b]$ pour $p\geq 1$, donc y est intégrable. 0 dehors, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. Vrai par la critère de Riemann.

11 Séance 12 mai 2021

Définition 95. Le produit de convolution *de deux fonctions mesurables* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *et* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *est défini par (quand l'intégrale est bien défini)*

$$(f\star g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemme 96. $f\star g=g\star f$

Théorème 97. *Si* $f\in\mathcal{L}^1$ *et* $g\in\mathcal{L}^p$ *quand* $p\geq 1$, *alors* $f\star g$ *est bien définie,* $f\star g\in\mathcal{L}^p$ *et* $\|f\star g\|_p\leq\|f\|_1\,\|g\|_p$.

Théorème 98. *Si* $f\in\mathcal{L}^1$ *et* $g\in C_b(\mathbb{R})=C_b^0(\mathbb{R})=C(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^\infty$, *alors* $f\star g\in C_b(\mathbb{R})$. *De plus, si* $g\in C_b^1(\mathbb{R})$ *(c'est-à-dire,* $g\in C^1(\mathbb{R})$ *et* $g,g'\in\mathcal{L}^\infty$*), alors* $f\star g\in C_b^1(\mathbb{R})$ *et* $(f\star g)'=f\star g'$*:*

$$(f\star g)'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g\star f)(x)=\int_{\mathbb{R}} g'(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 99. Le support de f: $\operatorname{supp} f:=\overline{\{f\neq 0\}}$

Exercice. (Ch3 Ex1.1(5-)) Vrai ou faux

1. Pour $p\geq 1$, $f\in\mathcal{L}^p$ et $g\in C_b\Longrightarrow f\,g\in C_b$.
2. Pour $p\geq 1$, $f\in\mathcal{L}^p$ et $g\in C_b\Longrightarrow f\,g\in\mathcal{L}^p$.
3. f et $g\in\mathcal{L}^1\Longrightarrow f\,g\in\mathcal{L}^1$.
4. f et $g\in\mathcal{L}^2\Longrightarrow f\,g\in\mathcal{L}^1$.
5. f et $g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\Longrightarrow((x,y)\mapsto f(x)\,g(y))\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

Solution.

1. Faux. $g=1$ et $f(x)=1_{[0,1]}(x)\,x^\alpha$ pour $\alpha=-1/(2\,p)$.
2. Vrai. $\int_{\mathbb{R}}|f\,g|^p\leq\|g\|_\infty\int_{\mathbb{R}}|f|^p<+\infty$ comme $|g|\leq\|g\|_\infty$ p.p.
3. Faux. Prenons $f(x)=1_{[0,1]}(x)\,x^\alpha$ et $g(x)=1_{[0,1]}(x)\,x^\beta$ où $\alpha=\beta=-1/2$.
4. Vrai.
   a. $0\leq(|f|-|g|)^2\Longrightarrow|f\,g|\leq\frac{1}{2}(|f|^2+|g|^2)\Longrightarrow\int|f\,g|\leq\frac{1}{2}(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)<+\infty$
   b. Cauchy-Schwarz: $\|f\,g\|_1\leq\|f\|_2\,\|g\|_2$
5. Vrai. $\int_{\mathbb{R}^2}|F|=\int_{\mathbb{R}}|f|\int_{\mathbb{R}}|g|<+\infty$ par le thm de Fubini où $F(x,y)=f(x)\,g(y)$

Exercice. (Ch3 Ex2.10) Montrer que $f\star g$ est bien définie, et la calcule:

1. $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x}\,1_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$ et $g(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}\,1_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$ pour $0<\alpha\neq\beta<1$.
2. $f=1_{[-1,1]}$ et $g=1_{[-a,a]}$ pour $a>0$.

Solution.

1. $f,g\in\mathcal{L}^1$ donc $f\star g\in\mathcal{L}^1$. Quand $x<0$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, soit $t<0$ soit $x-t<0$, donc $(f\star g)(x)=0$. On suppose que $x\geq 0$

$$\begin{aligned}(f\star g)(x)&=\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x \mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\alpha x} \left.\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta}\right|_{t=0}^{x}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha-\beta}$$

2. $1_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1$ et $1_{[-a,a]} \in \mathcal{L}^1$. $1_{[-a,a]}(x-t) = 1_{[x-a,x+a]}(t)$. $(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]}\, 1_{[x-a,x+a]} = \lambda([-1,1] \cap [x-a, x+a])$ qui est

$$\begin{cases} 0 & x-a<x+a<-1 \\ x+a+1 & x-a<-1 \le x+a \le 1 \\ 2\,a & -1 \le x-a < x+a \le 1 \\ 2 & x-a<-1<1<x+a \\ 1-x+a & -1 \le x-a \le 1 < x+a \\ 0 & 1<x-a<x+a \end{cases}$$

Exercice. (Ch3 Ex2.11) Soient $f = 1_{[0,\pi]}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

1. Montrer que $f\star g$ existe et de classe C^1. Calculer $(f\star g)'$ en termes de $f\star g$.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f\star g$ et en déduire que $(f\star g)(x) = (f\star g)(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.
3. Calculer directement $f\star g$.

Solution.

1. $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in C_b(\mathbb{R})$ et $g' \in C_b(\mathbb{R})$, donc $f\star g \in C_b^1$ et $(f\star g)' = f\star g' = -\mathrm{i}\, f\star g$.
2. $u' = -\mathrm{i}\, u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\, u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,(u' + \mathrm{i}\, u) = 0$ donc par NL, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\, u(x) = u(0) \Longrightarrow u(x) = u(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.
3. $(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\pi]}(x-t)\, g(t) = \int_{[x-\pi,x]} g = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\pi)}}{-\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

Exercice. (Ch3 Ex2.12) Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Donner l'expression de $(f\star f)(x)$.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $-2\,y^2 - x^2 + 2\,x\,y = -2\,(y - a\,x)^2 + b\,x^2$.
3. Effectuer le changement de variables $u = y - a\,x$ et en déduire la valeur de $(f\star f)(x)$ en rappelant que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Solution.

1. $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-t)^2-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2y^2+2xy-x^2}\,\mathrm{d}y$
2. $-2\,y^2 + 2\,x\,y - x^2 = -2\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} - x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\,x\right)^2 - \frac{1}{2}\,x^2$.
3. Il suffit d'évaluer $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2y^2+2xy-x^2}\,\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2y^2+2xy-x^2}\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2(y-x/2)^2-x^2/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\sqrt{2}z)^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{2}\,z) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}$$

où on a utilisé deux fois le changement de variables pour un difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (il y a deux versions de changement de variable: $(\varphi: [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ est dérviable où $[a,b]$ est un intervalle compact) et $(\varphi: \mathbb{R}^d \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme))

Exercice 12. Déterminer l'aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ où $a, b > 0$ en utilisant le changement de variables $x = a\,r\cos\theta$ et $y = b\,r\sin\theta$ pour $0 < r < 1$ et $\theta \in]0, 2\,\pi[$.

Solution. Tout d'abord, pour l'application $\varphi:]0,1[_r \times]0, 2\,\pi[_\theta \to D \setminus D_0$, $(r,\theta) \mapsto (a\,r\cos\theta, b\,r\sin\theta)$ où $D_0 \subseteq D$ est un sous-ensemble négligéable,

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ a\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{pmatrix}$$

donc $\det J_\varphi = a\,b\,r\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a\,b\,r$.

$$\begin{aligned} \lambda(D) &= \int_{]0,1[_r \times]0,2\pi[_\theta} a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= a\,b\,2\,\pi \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \\ &= \pi\,a\,b \end{aligned}$$

Exercice 13. En utilisant le changement de variables dans l'exercices précédent, calculer

$$\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

où $D \subseteq \mathbb{R}^3$ est délimitée par $x = 0$, $x = 1$ et $x^2 + 1 = (y/a)^2 + (z/b)^2$ où a, $b > 0$.

Solution. Tout d'abord, $D \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x + y$ est continue sur D qui est compact, donc y est intégrable.

$$\begin{aligned} \int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{D_x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

où $D_x := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (y/a)^2 + (z/b)^2 \leq 1 + x^2\}$ et $F(x) := \int_{D_x} (x + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. En utilisant le changement de variables $y = a\,r\sqrt{1+x^2}\cos\theta$ et $z = b\,r\sqrt{1+x^2}\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{]0,1[_r \times]0,2\pi[_\theta} \left(x + a\,r\sqrt{1+x^2}\cos\theta\right) a\sqrt{1+x^2}\,b\sqrt{1+x^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= a\,b\,(1+x^2) \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left(x + a\,r\sqrt{1+x^2}\cos\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= a\,b\,(1+x^2) \int_0^1 2\,\pi\,x\,r\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$= \pi\, a\, b\, x\, (1 + x^2)$$

Donc

$$\int_D (x + y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi\, a\, b\, x\, (1 + x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{3\, \pi\, a\, b}{4}$$

Exercices non-traités

Exercice 14. Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle compact, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(I)$, alors $f \star g$ est bien définie p.p.

Définition 100. *Une fonction mesurable* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *est dite* localement intégrable*, notée* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *si pour tout compact* $K \subseteq \mathbb{R}^d$*, la fonction* $1_K\, f$ *est intégrable.*